陈英伟 著

全纯函数空间中的逼近理论

QUANCHUN HANSHU KONGJIAN ZHONGDE BIJINLILUN

Bernstein
Jackson
Hardy-Littlewood
K-泛函
Fejér

河北科学技术出版社



陈英伟　中国科技大学数学系理学博士，　河北经贸大学副教授，数统学院数学与应用数学系副主任。主要研究方向:复分析及函数逼近理论，调和分析等。近年来在国际权威学术期刊与核心期刊发表论文17篇。主持、参与完成国家自然科学基金项目各一项，现主持河北教育厅科研青年基金项目一项、参加国家青年自然科学基金项目一项，现主持一项河北经贸大学科研基金项目。曾主讲《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统

图书在版编目（CIP）数据

全纯函数空间中的逼近理论 / 陈英伟著. — 石家庄：河北科学技术出版社，2015.5
ISBN 978－7－5375－7607－9

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①多复变函数论 Ⅳ. ①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 097239 号

全纯函数空间中的逼近理论

陈英伟 著

出版发行	河北科学技术出版社
地　　址	石家庄市友谊北大街 330 号（邮编：050061）
印　　刷	石家庄燕赵创新印刷有限公司
开　　本	787×1092　1/16
印　　张	8.75
字　　数	150 千字
版　　次	2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	26.00 元

前　言

函数逼近有很久的历史，其理论研究的核心是用简单函数或较窄函数（如代数多项式、三角多项式、样条函数、整函数等）来逼近一类较为复杂或较广的函数，以及研究逼近的定性和定量问题。实变函数以及单复变全纯函数和球面调和函数的逼近理论已有丰富的内容，但是多复变全纯函数空间逼近理论尚待建立和完善。

本书是在笔者博士论文基础上加以补充完成的，涵盖了多年来较新的学术成果，其中大部分业已公开发表。本书以多复变全纯函数空间为主要研究对象，围绕中心逼近定理展开多复变全纯函数空间的逼近研究。如：引入了新的与测度 μ 相关的 Q_μ 和 A_μ 全纯函数空间，统一处理了众多函数空间包括 BMOA，Bloch，Q_p，Hardy，Bergman，Lipschitz，Q_K，$F(p,q,s)$，球代数，Bargmann 空间，建立了 Q_μ 和 A_μ 空间上的多项式逼近的正逆定理；在多复变全纯函数空间中研究了 K—泛函理论，即建立了 Q_p 空间上的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子的弱等价性、K—泛函和光滑模的等价性、Marchaud 不等式等理论；将刻画 Hardy 空间边界值光滑性的 Hardy—Littlewood 定理推广到 Bergman 空间；最后还将关于 Dirichlet 函数类的 Fejér 算子逼近理论从单位圆盘推广到单位球上等。

多复变全纯函数空间逼近论的研究丰富和完善了现有多复变函数理论，由于逼近论在实分析、复分析、调和分析、计算科学、信息理论和数理统计等领域具有重要作用，因此，多复变逼近理论具有广阔的应用前景。

由于水平有限，书中难免有不足或疏漏的地方，敬请广大读者批评指正，一并表示感谢！

著　者

2015 年 5 月

本书来源于国家自然科学基金(11126246)，河北省自然科学基金(A2015207007)，河北省教育厅科研基金(QN20131027)和河北经贸大学校内科研基金(2013KYQ07)等课题，同时感谢河北经贸大学校内出版基金和数统学院应用统计学省重点学科的特别资助。

目 录

第一章 绪论 …………………………………………………………… (1)
1.1 引言 …………………………………………………………… (1)
1.2 预备知识 ……………………………………………………… (2)
1.2.1 多复变知识 ………………………………………………… (2)
1.2.2 逼近论知识 ………………………………………………… (3)
1.3 主要内容简介 ………………………………………………… (4)
1.3.1 Jackson 定理与 Bernstein 定理 ………………………… (4)
1.3.2 K—泛函 …………………………………………………… (5)
1.3.3 Hardy—Littlewood 定理 ………………………………… (5)
1.3.4 Fejér 算子逼近 …………………………………………… (5)
第二章 Jackson 定理 …………………………………………………… (7)
2.1 单位圆盘上的 Q_p 空间 ………………………………………… (7)
2.1.1 Q_p 空间 ………………………………………………………… (7)
2.1.2 逼近多项式 ………………………………………………… (8)
2.1.3 误差函数的导数估计 ……………………………………… (10)
2.1.4 Jackson 定理 ……………………………………………… (14)
2.2 星形圆型域上的 Q_μ 空间 …………………………………… (19)
2.2.1 积分公式 …………………………………………………… (21)
2.2.2 Jackson 定理 ……………………………………………… (22)
2.2.3 梯度估计 …………………………………………………… (25)
2.2.4 Q_μ 空间 ………………………………………………………… (27)

2.3 其他空间 …… (31)
2.3.1 逼近点态估计 …… (31)
2.3.2 Hardy 型空间 …… (33)
2.3.3 Bloch 型空间 …… (34)
2.3.4 D 代数 …… (35)
2.3.5 Lipschitz 空间 …… (38)
2.3.6 Besov 空间 …… (39)
2.4 多圆柱上全纯空间 …… (43)
第三章 Bernstein 定理 …… (44)
3.1 单位圆盘上的 Q_p 空间 …… (44)
3.1.1 Bernstein 不等式 …… (44)
3.1.2 最佳逼近存在性 …… (47)
3.1.3 Bernstein 逆定理 …… (48)
3.1.4 正逆定理的应用 …… (51)
3.2 星形圆型域上的 Q_μ 空间 …… (52)
3.2.1 Bernstein 不等式 …… (52)
3.2.2 最佳逼近存在性 …… (56)
3.2.3 Bernstein 逆定理 …… (57)
3.2.4 正逆定理的应用 …… (59)
3.3 其他空间 …… (59)
3.3.1 A_μ 空间 …… (59)
3.3.2 Bergman 型空间 …… (61)
3.3.3 D 代数 …… (63)
第四章 K－泛函及其应用 …… (66)
4.1 K－泛函和 Riesz 算子 …… (66)
4.2 强逆不等式 …… (67)
4.3 线性组合逼近 …… (76)
4.4 Marchaud 不等式 …… (79)
4.5 K－泛函与光滑模等价性 …… (81)

第五章　Hardy－Littlewood 型定理 …………………………………… (88)
5.1　引言 ……………………………………………………………… (88)
5.2　Bergman 型空间与径向导数 ………………………………… (90)
5.3　Hardy－Littlewood 型正定理 ………………………………… (93)
5.4　Hardy－Littlewood 型逆定理 ………………………………… (99)
5.5　Hardy－Littlewood 定理 ……………………………………… (107)
第六章　Dirichlet 类的 Fejér 算子逼近 …………………………… (109)
6.1　背景 ……………………………………………………………… (109)
6.2　包含关系 ………………………………………………………… (112)
6.3　一些引理 ………………………………………………………… (113)
6.4　Fejér 算子逼近 ………………………………………………… (115)
参考文献 ……………………………………………………………… (121)
后记 …………………………………………………………………… (129)

第一章 绪 论

本书研究对象为多复变全纯函数空间，以代数多项式中心逼近定理为中心展开多复变全纯函数空间逼近的理论．本章给出相关的历史背景并列出本书的主要内容简介.

§1.1 引 言

函数逼近理论的研究具有悠久的历史[1,2]，在1885年Weierstrass发表了著名的定理，即紧区间上的连续函数（周期函数）都可由代数多项式（三角多项式）无限逼近．从此逼近论得到迅猛发展，特别在实函数逼近论已形成较为丰富的内容. 其研究的核心为用简单函数或较窄函数（如代数多项式，三角多项式，样条函数等）来逼近一类较为复杂函数或较宽函数，其中心逼近问题是研究各类函数的光滑性（如连续性，可微性，Lipschitz光滑性等）与逼近程度（逼近阶）的相互关系，即正定理（Jackson定理）与逆定理（Bernstein定理）．同时引申了许多其他的逼近问题，诸如算子的构造逼近问题，同时逼近，线性组合逼近，光滑模与K－泛函，一些相关的不等式等．函数逼近理论首先从实连续函数开始，逐渐被引入到单复变函数中去，并产生许多类似的结果[3]．但是多复变全纯函数空间逼近理论结果较少．本文将研究多复变全纯函数空间逼近理论.

本书以多复变全纯函数空间为主要研究对象，研究其上以中心逼近为中心的逼近理论．通过引入新的与测度μ相关的Q_μ和A_μ全纯函数空间，统一处理了众多函数空间包括BMOA，Bloch，Q_p，Hardy，Bergman，Lipschitz，Q_K，$F(p,q,s)$，球代数，Bargmann空间．建立了Q_μ和A_μ空间上的多项式

逼近的正逆定理，从而统一给出了众多全纯函数空间的一致的逼近结果．需要指出的是，在此工作之前尚没有发现关于多复变全纯函数空间上的 Bernstein 逆定理的结果．在多复变全纯函数空间逼近论的研究中，我们还将引入径向导数定义的 K－泛函，并以此为工具建立了 Q_p 空间上的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子的弱等价性等理论．我们将刻画 Hardy 空间边界值光滑性的 Hardy－Littlewood 定理推广到 Bergman 空间，克服了 Bergman 空间没有边界值的缺陷，这是将 Hardy 空间边界理论推广到 Bergman 空间的崭新理论．我们还将 Savchuk 关于 Dirichlet 函数类的 Fejér 算子逼近理论从单位圆盘推广到单位球上.

多复变全纯函数空间逼近论的研究丰富和完善了现有多复变函数理论．考虑到逼近论在实分析、复分析、调和分析、计算科学、工程数学、信息理论和数理统计等领域的重要作用，因此多复变逼近理论具有广阔的应用前景.

§1.2　预备知识

§1.2.1　多复变知识

为叙述本书主要内容，我们给出一些符号和概念等.

设 $z=(z_1, \cdots, z_n)$ 与 $w=(w_1, \cdots, w_n)$ 是 C^n 中的两点，记

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1+\cdots+z_n\overline{w}_n, \quad |z|=\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2},$$

则 $B=\{z\in C^n: |z|<1\}$ 是 C^n 中的单位球．当 $n=1$ 时，记 $U=\{z\in C: |z|<1\}$,为单位圆盘.

设 D 为 C^n 中的域，如果对任意 $z\in D$，$\lambda\in C$ 和 $|\lambda|<1$，有 $\lambda z\in D$，则称 D 为星形域．如果对任意 $z\in D$ 及 $0\leqslant\theta<2\pi$，都有 $e^{i\theta}z\in D$，则称 D 是圆型域.

域 $D\subset C^n$ 上全纯函数 f 的径向导数定义为

$$Rf(z)=\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z).$$

下面各章节中，定义域 D 将具体取为单位圆盘，单位球，有界对称域或

星形圆型域等，空间 X 将取定为具体全纯函数空间，如 Q_p 空间，Bloch 空间，Besov 空间等（各函数空间定义具体看各章）.

以后各章节中，C 均表示正的常数，不同的地方取值可能不同．若对任意非负函数 f 和 g，存在一个正常数 C，满足 $f\leqslant Cg$，则记 $f\lesssim g$. 若同时成立 $f\lesssim g$ 和 $g\lesssim f$，我们记 $f\simeq g$.

对于更多关于多复变函数论的知识，读者可查阅经典教材[4,5,6].

§1.2.2 逼近论知识

光滑模（连续模）是刻画函数光滑性的基本工具，在研究函数的多项式逼近的理论中起着重要作用. 根据实际情况，光滑模（连续模）也有多种定义形式．本书中我们主要采用经典逼近论著作[1]中的记号，经典的光滑模（连续模）定义如下：

定义 1.2.1 令 X 为定义在域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上具有半模 $\|\cdot\|_X$ 的函数空间. 对任 $f\in X$，$\delta>0$，$r\in\mathbb{N}$，X 中的 f 的 r 阶光滑模定义为

$$\omega_r(\delta,\ f,\ X):=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^r f(z)\|_X,$$

其中

$$\Delta_h^r f(z)=\Delta_h\Delta_h^{r-1}f(z)=\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}f(e^{ikh}z).$$

特别地，$r=1$ 阶光滑模也称作 f 的连续模，记为

$$\omega(\delta,\ f,\ X):=\omega_1(\delta,\ f,\ X).$$

易知光滑模 $\omega_r(t,\ f,\ X)$ 为关于 t 的连续单调增加函数，且有 $\omega_r(t,\ f,\ X)\to 0, t\to 0^+$，进一步一般均拥有如下的基本性质[1,2,3,7,8]：

(a) $\omega_r(t,\ f,\ X)$ 关于 t 是不减函数且 $\lim\limits_{t\to 0}\omega_r(t,\ f,\ X)=0$.

(b) $\omega_r(t,\ f+g,\ X)\leqslant C(\omega_r(t,\ f,\ X)+\omega_r(t,\ g,\ X))$.

(c) 若 $R^rf\in X$，则 $\omega_r(t,\ f,\ X)\leqslant C\|f\|_X,\omega_r(t,\ f,\ X)\leqslant Ct^r\|R^rf\|_X$.

(d) $\omega_r(\lambda t,\ f,\ X)\leqslant C(1+\lambda)^r\omega_r(t,\ f,\ X),\lambda\geqslant 0$.

注：以后各章也会在部分函数空间对上述性质做相关证明．

我们称函数 $\omega\colon[0,a]\to\mathbb{R}$ 为连续模，即满足：ω 是单增的连续函数且

$\omega(0)=0$，当 $t>0$ 时，$\omega(t)>0$，及

$$\omega(t+s)\leqslant\omega(t)+\omega(s).$$

定义 1.2.2 函数 f 的多项式最佳逼近定义为

$$E_k(f, X):=\inf_{P_k\in \mathrm{P}_k}\|f-P_k\|_X,$$

其中 P_k 表示次数至多为 k 的多项式的全体.

对于更多实函数和单复变函数逼近论更多知识，读者可参考经典教材[1,2,3]及最新关于球面调和逼近的书籍[8].

§1.3 主要内容简介

本书主要内容为多复变全纯空间逼近论的下列几个方面：

§1.3.1 Jackson 定理与 Bernstein 定理

函数的光滑性究竟对函数逼近速度产生怎样影响？D. Jackson 在 1912 年证明了可微函数的一致三角逼近.

Jackson 定理： 若 $f\in C^r([0,2\pi)), r\in \mathrm{N}$，则对于一切正整数 k 都成立：

$$E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r}\omega\left(\frac{1}{k}, f^{(r)}\right),$$

其中 $E_k(f)$ 表示 f 的 k 阶最佳逼近，$\omega(\frac{1}{k}, f^{(r)})$ 表示 $f^{(r)}$ 的连续模，$C(r)$ 表示与 r 有关的常数.

反过来，如何利用多项式逼近的速度来刻画函数的光滑性？Bernstein 在 1912 年得到了下面重要的结果.

Bernstein 定理： 若对某 $0<\alpha<1$，有 $E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r-\alpha}, k=1,2,\cdots$，则

$$f^{(r)}\in Lip\alpha,$$

其中 $Lip\alpha$ 表示 Lipschitz$-\alpha$ 函数类.

其后，Jackson 定理和 Bernstein 定理在许多实变量函数空间得到了拓展[1,2]，并在一些单复变函数空间中也得到相应的结论[3].

本书目的之一是建立单位圆盘上 Q_p 空间，Bergman 型空间等函数空间上的 Jackson 定理，Bernstein 不等式和 Bernstein 定理，并把相应结论拓展到多

复变单位球，有界对称域甚至星形圆型域上．我们引入了与测度 μ 相伴的 Q_μ 和 A_μ 空间，它们包含了 Bloch，BMOA，Q_p，Q_K，$F(p、q、s)$，Dirichlet 空间为具体例子，讨论了 Q_μ 和 A_μ 空间上的 Jackson 定理和 Bernstein 定理，从而统一得到了诸多空间上关于逼近的正逆定理（见第二章和第三章）.

§1.3.2　K－泛函

J. Peetre 在 1969 年首次引入 K－泛函[9]. K－泛函是逼近论的一个重要工具，它表示一个函数逼近的内在性质．K－泛函和光滑模在逼近理论中起着同等重要的作用．K－泛函是研究线性算子逼近问题的常用工具．我们在单位球 B 上 Q_p 空间的逼近研究中引入 K－泛函，同时利用 Riesz 算子研究了 Q_p 空间中的强逆不等式，多项式逼近和 Riesz 算子逼近的弱等价性，线性组合逼近，Marchaud 不等式及 K－泛函和光滑模的等价性等（见第四章）.

§1.3.3　Hardy－Littlewood 定理

对于单位圆盘 U 上的 Hardy 空间 $H^p(U)$，1932 年 Hardy 和 Littlewood 观察到这样的现象：导数 $f'(z)$ 的平均增长和边界函数 $f(e^{i\theta})$ 的光滑性有着紧密的关系.

定理 1.3.1[10]　设 $f(z)\in H^p(U)$，$1\leqslant p<\infty$，及 $0<\alpha\leqslant 1$. 则

$$f(e^{i\theta})\in \Lambda_\alpha^p \Longleftrightarrow M_p(r,\ f')=O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}}\right),\qquad r\to 1^-.$$

这里，Λ_α^p 是由所有满足下列条件的 $\phi\in L^p([0,2\pi))$ 构成：

$$\omega_p(t,\phi):=\sup_{0\leqslant\theta\leqslant t}\|\phi(e^{i\theta}z)-\phi(z)\|_{L^p[0,2\pi)}=O(t^\alpha),t\to 0^+.$$

Hardy 空间 H^p(U) 中的一个函数 f 称为属于 Hölder 类是指其边界函数 $f(e^{i\theta})$ 在空间 $L^p(0,2\pi)$ 中为 Hölder 类，即，$f(e^{i\theta})\in\Lambda_\alpha^p$．故定理 1.3.1 可解释为 Hardy 空间中的 Hölder 函数类按照导数增长的等价刻画．Kryakin 和 Trebels 在[11]中利用连续模和本性 K－泛函推广了这一结果．我们把 Hardy－Littlewood 定理推广到有界对称域 Ω 上的 Bergman 型空间，建立有界对称域 Ω 上 Bergman 型空间中的 Hölder 类利用径向导数的等价刻画（见第五章）.

§1.3.4　Fejér 算子逼近

周期函数可以通过其 Fourier 级数的 Fejér 算子逼近[12]．在单位圆盘上全

纯函数 f 有类似结果[13,14,15,16]. 最近，Savchuk[17]得到单位圆盘 U 上 Dirichlet 类由 Fejér 算子逼近的精确估计：若 f 的 Taylor 展开为

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j,\ a_j=\frac{f^{(j)}(0)}{j!},\ z\in U.$$

Fejér 算子序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ 定义为

$$\sigma_0(f)(z)=0,$$

$$\sigma_k(f)(z):=\sum_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{k})a_jz^j,k\in\mathrm{N}.$$

单位圆盘 U 上的 Dirichlet 函数类定义为

$$D_p(U):=\{f\in H(U):\|f\|_{D_p}^p=\int_U|f'(z)|^p dm(z)\leqslant 1\},$$

其中 $dm(z)$ 为 U 上规范化的 Lebesgue 测度.

定理 1.3.2[17]　设 $1\leqslant p<\infty$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

(1) 对任意 $k\in\mathrm{N}$,

$$\frac{\frac{1}{2}\min(p,q)}{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-1)+1\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant E_k(D_p,H^p)\leqslant F_k(D_p,H^p)\leqslant\frac{1}{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-1)+1\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(2) 对任意 $f\in D_p$,

$$\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}=o(k^{-\frac{1}{q}}),k\to\infty,$$

其中

$$F_k(D_p,H^p):=\sup_{f\in D_p}\{\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}\},$$

$$E_k(D_p,H^p):=\sup_{f\in D_p}\{E_k(f)_{H^p}\},$$

上式中

$$E_k(f)_{H^p}:=\inf\{\|f-P\|_{H^p}:P\in\mathrm{P}_{k-1}\},$$

P_{k-1} 表示至多 $k-1$ 次代数多项式全体.

我们将上述结果推广到单位球 B 上的 Dirichlet 函数类，给出 Dirichlet 函数类利用 Fejér 算子在 Hardy 空间范数下的确切逼近阶和上界估计（见第六章）.

第二章　Jackson 定理

函数的光滑性究竟对函数逼近速度产生怎样影响？D. Jackson 在 1912 年证明了可微函数的一致三角逼近.

Jackson **定理**：若 $f\in C^r([0,2\pi))$，$r\in \mathrm{N}$，则对于一切正整数 k 都成立：

$$E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r}\omega(\frac{1}{k},\ f^{(r)}),$$

其中 $E_k(f)$ 表示 f 的 k 阶最佳逼近，$\omega(\frac{1}{k},\ f^{(r)})$ 表示 $f^{(r)}$ 的连续模，$C(r)$ 表示与 r 有关的常数.

其后，Jackson 定理在许多实变量函数空间得到了拓展[1,2]，并在一些单复变函数空间中也得到相应的结论[3].

在逼近论中，Jackson 定理给出了函数利用多项式逼近的上界估计．我们将研究各全纯函数空间上的 Jackson 定理.

§2.1　单位圆盘上的 Q_p 空间

§2.1.1　Q_p 空间

我们用 $g(\cdot,\ w)$ 表示单位圆盘 U 上极点为 w 的 Green 函数，

$$g(z,w)=-\log|\varphi_w(z)|,\quad z,w\in U,$$

其中 φ_w 为 U 上的 Möbius 变换

$$\varphi_w(z)=\frac{w-z}{1-\overline{w}z}.$$

$H(U)$ 表示 U 上全纯函数的全体，$dm(z)$ 为 U 上 Lebesgue 测度．函数 $f\in H(U)$ 属于 Q_p 空间($0\leqslant p<\infty$)，如果

$$\| f \|_{Q_p}^2 := \sup_{w\in U} \int_U | f'(z) |^2 g^p(z,w) dm(z) < +\infty.$$

易知 $\| \cdot \|_{Q_p}$ 为半模．如果模取为 $|f(0)| + \| f \|_{Q_p}$，则 Q_p 为 Banach 空间（参见[18,19]）．熟知 $Q_1 =$ BMOA，$Q_0 =$ Dirichlet 空间，而且对任意 $p \in (1,\infty)$，$Q_p =$ Bloch 空间．关于 Q_p 空间的最新进展参见[19]和[20].

逼近论中，Jackson 正定理已由实函数空间推广到了单复变全纯函数空间．例如 Storozhenko 在 Hardy 空间 H^p 中建立了如下 Jackson 定理．

定理 2.1.1[21] 存在 k 次多项式 P_k 和正常数 $C(k)$，使得对任意 $0 < p < \infty$，有

$$\| f - P_k \|_{H^p} \leqslant C(k)\omega(1/k, f, H^p), \qquad \forall f \in H^p.$$

该方面更多结果可参考[1,2,15,22]等文献.

假设 $f \in H(U)$，则它具有 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \qquad a_j \in \mathbb{C} \quad . \tag{2.1}$$

函数 f 的径向导数及高阶径向导数定义为

$$Rf(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j z^j,\ R^r f = R(R^{r-1} f), \qquad r \in \mathbb{N}.$$

自然的问题是定理 2.1.1 在 $p \to \infty$ 是否成立？即给出 BMOA 或更一般 Q_p 空间上的 Jackson 定理．我们将得到比定理 2.1.1 更深刻的 Q_p 空间中的高阶 Jackson 定理.

§2.1.2 逼近多项式

为构造逼近多项式，我们需引入一个 $[-\pi,\pi)$ 上的复测度：固定 $a>0$，

$$d\mu_k^\rho(\varphi) = iC_k^a (\rho e^{i\varphi})^{1-k} \left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}} \right)^{a+1} d\varphi\ ,$$

其中

$$C_k^a = (2\pi i)^{-1} \frac{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}{\Gamma(k+a)}.$$

从下面引理 2.1.2（取 $f \equiv 1$，$r=1$）易知：对任意 $\rho \in (0,1]$ 和 $k \in \mathbb{N}$，$d\mu_k^\rho(\varphi)$ 都为 $[-\pi,\pi)$ 上的概率测度.

当 $\rho=1$ 时，记

$$dv_k := d\mu_k^1(\varphi).$$

其全变差测度可由广义 Jackson 核函数给出：

$$d|v_k| = |C_k^a| \cdot T_{k+1}^{\frac{a+1}{2}}(\varphi)d\varphi,$$

其中广义 Jackson 核函数为

$$T_k^\beta(\varphi) := \left|\frac{\sin\dfrac{k\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\right|^{2\beta}.$$

我们引入一类重要算子 $P_k[\cdot]$，

$$P_k[f](z) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)}a_j z^j, \quad (2.2)$$

它将提供最佳逼近多项式．由引理 2.1.2 可看出它与变量 ρ 无关．

引理 2.1.2　若 $f \in H(U)$，则对任意 $z \in U$ 和任意 $\rho \in (0, 1)$，

$$P_k[f](z) = \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)d\mu_k^\rho(\varphi) \quad . \quad (2.3)$$

$$P_k[f](z) = \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}C_k^a\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}d\lambda. \quad (2.4)$$

(2.3) 式对 $\rho = 1$ 也成立．

证明：对任固定的 $\rho \in (0, 1)$，通过变量代换 $\lambda = \rho e^{i\varphi}$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)d\mu_k^\rho(\varphi) = C_k^a\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1}d\lambda \quad . \quad (2.5)$$

由二项式级数 $(1-w)^{a+1} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l w^l$，其中 $|w| < 1$，我们有

$$(1-\lambda^{k+1})^{a+1} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \lambda^{(k+1)l}, \quad |\lambda| < 1.$$

因此，式 (2.5) 中积分可以被分为两部分

$$f(\lambda^m z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{a+1} =$$

$$f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)} + \sum_{l=1}^{\infty} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}b_l\lambda^{(k+1)l}.$$

因为第二项在单位圆盘 $|\lambda| < 1$ 上全纯，由留数定理知其在 $|\lambda| = \rho$ 积分为

零，所以由第一项得出

$$\int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\varphi})^m z)\, d\mu_k^{\rho}(\varphi) = C_k^a \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\, d\lambda.$$

记（2.4）中被积函数为

$$g_m(\lambda) = f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)} \quad . \tag{2.6}$$

由于 $g_m(\lambda)$ 在除原点外单位圆盘上全纯，由留数定理可得

$$\int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\, d\lambda = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g_m(\lambda),0) \quad . \tag{2.7}$$

为计算上面的留数，对（2.7）的左侧利用 f 的 Taylor 展式，再由（2.6）和二项式级数

$$(1-\lambda)^{-(a+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} = \lambda^l,$$

我们可获得 Laurent 展开

$$g_m(\lambda) = \sum_{l,j=0}^{\infty} a_j z^j \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} \lambda^{l+mj-k}.$$

这样得到

$$\mathrm{Res}(g_m(\lambda),0) = \sum_{l+mj=k-1} \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} a_j z^j.$$

结合（2.7），有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m} C_k^a \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda^m z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(a+1)}\, d\lambda \\
&= 2\pi i C_k^a \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m} \sum_{l+mj=k-1} \frac{\Gamma(l+a+1)}{l!\,\Gamma(a+1)} a_j z^j \\
&= \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)} \sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m} \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]} \frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)} a_j z^j \\
&= P_k[f](z).
\end{aligned}$$

这就证明了（2.3）和(2.4)，其中 $\rho\in(0,1)$．对任固定点 $z\in U$，通过取 $\rho\to 1$，我们可知:（2.3）在 $\rho=1$ 时也成立．故引理得证．

§2.1.3　误差函数的导数估计

考虑 $[-\pi,\pi)$ 上的测度：对任意 $1>\rho>0$，$\eta>0$，$a>0$，

$$dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) := |C_k^a|^{\eta} \rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1} T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)\, d\varphi \quad . \tag{2.8}$$

我们回忆

$$\Delta_{\varphi}^{r+1}f(z)=\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^{r+1-m}\binom{r+1}{m}f(e^{im\varphi}z).$$

引理 2.1.3[23]　设 $0<p\leqslant 1$，$0<r<1$. 若 f 在闭单位圆盘 $\overline{U}$ 上全纯，则

$$\left(\int_{[-\pi,\pi)}|f(re^{i\theta})|d\theta\right)^{p}\lesssim(1-r)^{p-1}\int_{[-\pi,\pi)}|f(e^{i\theta})|^{p}d\theta. \tag{2.9}$$

证明：取单调递增序列 $r_n\to\rho$，$n=0,1,2,\cdots$及 $r_0=r$. 由 Cauchy 积分公式易知

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,|z|=r_{k-1}.$$

则

$$\sup_{\varphi}|f(r_{k-1}e^{i\varphi})|\leqslant r_k(r_k-r_{k-1})^{-1}\sup_{t}|f(r_ke^{it})|^{1-p}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_ke^{it})|^{p}dt,$$

即

$$M_{\infty}(r_{k-1},f)\leqslant r_k(r_k-r_{k-1})^{-1}M_{\infty}(r_k,f)M_p^p(r_k,f),k=1,2,\cdots \tag{2.10}$$

其中 $M_{\infty}(r,f)=\sup\limits_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi}|f(re^{it})|$.

可得

$$M_1(r,f)\leqslant M_{\infty}^{1-p}(r,f)M_p^p(r,f).$$

结合（2.10），有

$$M_1(r,f)\leqslant M_{\infty}^{(1-p)^{n+1}}(r_n,f)M_p^p(r,f)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{r_k}{r_k-r_{k-1}}\right)^{(1-p)^k}M_p^{p(1-p)^k}(r_k,f).$$

令 $r_{-1}=0$，上式可重写为

$$M_1(r,f)\leqslant M_{\infty}^{(1-p)^{n+1}}(r_n,f)\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{r_k}{r_k-r_{k-1}}\right)^{(1-p)^k}M_p^{p(1-p)^k}(r_k,f).$$

再由 $M_p(r,f)$ 的单增性，我们可得

$$\limsup_{n\to\infty}M_{\infty}^{(1-p)^{n+1}}(r_n,f)\leqslant\lim_{n\to\infty}M_{\infty}^{(1-p)^{n+1}}(\rho,f)=1,$$

和

$$\limsup_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}M_p^{p(1-p)^k}(r_k,f)\leqslant\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}M_p^{p(1-p)^k}(\rho,f)$$
$$=\lim_{n\to\infty}M_p^{p\sum_{k=0}^{n}(1-p)^k}(\rho,f)=M_p(\rho,f).$$

取 $r_k - r_{k-1} = (\rho - r)(\gamma k^2)^{-1}$，$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$，则

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{r_k}{r_k - r_{k-1}}\right)^{(1-p)^k} \leqslant \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{rk^2}{\rho - r}\right)^{(1-p)^k}$$

$$\leqslant (\rho - r)^{1-1/p}\prod_{k=1}^{\infty}(\gamma k^2)^{(1-p)^k} = C_p\ (\rho - r)^{1-1/p}\quad . \tag{2.11}$$

故有

$$M_1(r,\ f) \leqslant C_p(\rho - r)^{1-1/p}M_p(\rho,\ f).$$

对任 $f \in H\ (\overline{U})$，可得

$$M_1(r,\ f) \leqslant C_p\lim_{\rho\to 1-}(\rho - r)^{1-1/p}M_p(\rho,\ f) = C_p(1-r)^{1-1/p}M_p(\rho,\ f).$$

引理 2.1.4 对任意 $1 > \eta \geqslant 0$，$k-1 \in \mathrm{N}$ 和 $f \in H\ (U)$，有

$$|(f(z) - P_k[f](z))'|^{\eta} \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|(\Delta_{\varphi}^{r+1}f(z))'|^{\eta}dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi). \tag{2.12}$$

证明：对任 $\rho \in (0,\ 1)$，我们有

$$(f(z) - P_k[f](z))'$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^{r+1-m}\binom{r+1}{m}f((\rho e^{i\varphi})^m z)\right)'\right|d\mu_k^{\rho}(\varphi)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^{r+1-m}\binom{r+1}{m}f'((\rho e^{i\varphi})^m z)(\rho e^{i\varphi})^m\right|d\mu_k^{\rho}(\varphi),$$

其中

$$d\mu_k^{\rho}(\varphi) = iC_k^a(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}d\varphi.$$

显然

$$|(f(z) - P_k[f](z))'| \leqslant C\rho^{1-k}\int_{-\pi}^{\pi}|F(\rho e^{i\varphi}, z)|\,d\varphi\ , \tag{2.13}$$

其中

$$F(\rho e^{i\varphi}, z) = C_k^a\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^{r+1-m}\binom{r+1}{m}f'((\rho e^{i\varphi})^m z)(\rho e^{i\varphi})^m$$

$$\cdot\left(\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right)^{a+1}.$$

在引理 2.1.3 中取 $g(\lambda) = F(\lambda,\ z)$，结合不等式（2.13），得到

$$
\begin{aligned}
&|f(z)-P_k[f](z))'|^\eta \\
&\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^{r+1-m}\binom{r+1}{m}f'(e^{im\varphi}z)e^{im\varphi}\right|^\eta dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi) \\
&= C\int_{-\pi}^{\pi}|(\Delta_\varphi^{r+1}f(z))'|^\eta dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi),
\end{aligned}
$$

其中 $dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi):=|C_k^a|^\eta\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi$.

注：尽管后面我们只是利用引理 2.1.4 中 $\eta=1$ 的情况，得到其一般的情况还是有意义的.

引理 2.1.5 [1]　若 k，$\beta\in\mathrm{N}$，则对任意 $\beta\in\mathrm{N}$，

$$
B_{k,\beta}:=\int_{-\pi}^{\pi}T_k^\beta(\varphi)d\varphi\simeq k^{2\beta-1},\text{当 } k\to+\infty,
$$

而且存在一常数 C_β，使得

$$
\frac{1}{B_{k,\beta}}\int_0^\pi\varphi^uT_k^\beta(\varphi)\,d\varphi\leqslant C_\beta k^{-u},\quad u=0,1,\cdots,2\beta-2.
$$

引理 2.1.6　若 $0<\eta\leqslant1$ 和 $\eta(a+1)\geqslant r+3$，则对任意 $k\in\mathrm{N}$ 和 $\rho=1-\frac{1}{k}$，有

$$
\int_{-\pi}^{\pi}(|k\varphi|+1)^{r+1}dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi)=O(1),k\to+\infty.
$$

证明：回忆

$$
dv_k^{\rho,\eta,a}(\varphi)=|C_k^a|^\eta\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi.
$$

由引理 2.1.5 得

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}(|k\varphi|+1)^{r+1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi &= 2\int_0^\pi(|k\varphi|+1)^{r+1}T_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi \\
&= 2\sum_{m=0}^{r+1}\binom{r+1}{m}\int_0^\pi|k\varphi|^mT_{k+1}^{\frac{\eta(a+1)}{2}}(\varphi)d\varphi \\
&= O(k^{\eta(a+1)-1}).
\end{aligned}
$$

注意到 $(1-\rho)^{\eta-1}\simeq k^{1-\eta}$，$\rho^{\eta(1-k)}\simeq1$ 和

$$
|C_k^a|^\eta\simeq\left(\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}\right)^{-\eta}\simeq(k^a)^{-\eta}=k^{-\eta a}.
$$

这就得到了所需结果.

引理 2.1.7　若 $f\in Q_p$，$\delta>0$，$\lambda>0$，$r\in\mathrm{N}$，则

$$\omega_r(\lambda\delta, f, Q_p) \leqslant (\lambda+1)^r \omega_r(\delta, f, Q_p).$$

证明：对 n 利用归纳法，易得（参见[2]）

$$\Delta_{nt}^r f(z) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{n-1} \Delta_t^r f\left(ze^{i(k_1+\cdots+k_r)t}\right). \tag{2.14}$$

令 $n=[\lambda]$，其中 $[\lambda]$ 表示小于等于 λ 的最大整数．由光滑模的单增性和(2.14)，可得

$$\begin{aligned}\omega_r(\lambda\delta, f, Q_p) &\leqslant \omega_r((n+1)\delta, f, Q_p)\\ &\leqslant (n+1)^r \omega_r(\delta, f, Q_p)\\ &\leqslant (\lambda+1)^r \omega_r(\delta, f, Q_p).\end{aligned}$$

§2.1.4 Jackson 定理

引理 2.1.8 若 $r\in \mathrm{N}$，$R^r f\in Q_p$，则

$$f, Rf, \cdots, R^{r-1} f\in Q_p.$$

证明：由归纳法只须证明：若 $Rf\in Q_p$，则 $f\in Q_p$.

熟知 Q_p 空间的下列等价刻画（参见[19,24]）：$f\in Q_p$ 当且仅当

$$\sup_{w\in U}\int_U |f'(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z) < \infty,$$

或

$$\sup_{w\in U}\int_U |Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z) < \infty.$$

我们将利用下列 Hardy－Littlewood 不等式（参见[25,26]）：对 $\forall\ g(z)\in H(U)$ 以及 $\forall\,\alpha>-1$，有

$$\begin{aligned}&\int_U |g(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dm(z)\\ &\leqslant C\left(|Rg(0)|^2+\int_U |Rg(z)|^2(1-|z|^2)^{\alpha+2} dm(z)\right),\end{aligned} \tag{2.15}$$

而且在 (2.15) 中取 $\alpha=p$. 取

$$g(z)=\frac{Rf(z)}{(1-\langle z,w\rangle)^p}, w\in U.$$

在不等式 (2.15) 两侧同时乘以 $(1-|w|^2)^p$，得到

$$\int_U |R f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)$$

$$\leqslant C((1-|w|^2)^p|R^2f(0)|^2+$$

$$\int_U\left|R\left(\frac{Rf(z)}{(1-\langle z,w\rangle)^p}\right)\right|^2(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z))\quad.\qquad(2.16)$$

首先我们假设 $p>0$. 因为

$$R\left(\frac{Rf(z)}{(1-\langle z,w\rangle)^p}\right)$$

$$=\frac{R^2f(z)(1-\langle z,w\rangle)^p+p\langle z,w\rangle Rf(z)(1-\langle z,w\rangle)^{p-1}}{(1-\langle z,w\rangle)^{2p}},$$

通过直接计算，(2.16) 变为

$$\int_U|Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)\leqslant$$

$$C((1-|w|^2)^p|R^2f(0)|^2+$$

$$\int_U\frac{|R^2f(z)|^2}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z)+$$

$$p^2\int_U\frac{|Rf(z)|^2}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p+2}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z)+$$

$$2p\int_U\frac{|R^2f(z)Rf(z)|}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p+1}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z))\quad.\qquad(2.17)$$

显然 $(1-|w|^2)^p|R^2f(0)|^2\leqslant C$. 再者对 $Rf\in Q_p$，有

$$\int_U\frac{|R^2f(z)|^2}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z)$$

$$=\int_U|R^2f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|z|^2)^2dm(z)$$

$$\leqslant\sup_{w\in U}\int_U|R^2f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)\leqslant C\quad.\qquad(2.18)$$

假定 $Rf\in Q_p$，从而

$$\sup_{w\in U}\int_U|R^2f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)\leqslant C\quad.\qquad(2.19)$$

利用[27]中定理 2.1，我们知 $f\in B$ (Bloch 空间) 而且

$$\sup_{z\in U}(1-|z|^2)^s|R^sf(z)|\leqslant C,\forall s\in\mathbb{N}.$$

则

$$\int_U\frac{|Rf(z)|^2}{|1-\langle z,w\rangle|^{2p+2}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z)$$

$$\leqslant \{\sup_{z\in U}(1-|z|^2)^2|Rf(z)|^2\}(1-|w|^2)^p\int_U \frac{(1-|z|^2)^p}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p+2}}dm(z)$$

$$\leqslant C, \tag{2.20}$$

其中最后一步，使用了[4]中性质 1. 4. 10.

同理，我们也可得

$$\int_U \frac{|R^2 f(z)Rf(z)|}{|(1-\langle z,w\rangle)|^{2p+1}}(1-|w|^2)^p(1-|z|^2)^{p+2}dm(z)\leqslant C. \tag{2.21}$$

由（2. 17）-（2. 21），知

$$\int_U |Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)\leqslant C \quad . \tag{2.22}$$

当 $p=0$ 时，由（2. 16），我们可直接得到

$$\int_U |Rf(z)|^2 dm(z)\leqslant C(|R^2f(0)|^2+\int_U |R^2f(z)|^2(1-|z|^2)^2 dm(z))$$

$$\leqslant C(|R^2f(0)|^2+\int_U |R^2f(z)|^2 dm(z))$$

$$\leqslant C. \tag{2.23}$$

由（2. 22）和(2. 23）知 $f\in Q_p$. 引理得证.

引理 2. 1. 9 对任意 $f(z)\in Q_p$ ，$r\in \mathrm{N}$，$s\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ 和 $h>0$ ，有

$$\|\Delta_h^{r+s}f\|_{Q_p}\leqslant h^r\|\Delta_h^s(R^r f)\|_{Q_p} \quad . \tag{2.24}$$

证明：易知

$$\Delta_h^r(f(z))=(\Delta_h^r f)(z),$$

$$(\Delta_h^r(f(ze^{i\theta})))'=e^{i\theta}\cdot(\Delta_h^r f)'(ze^{i\theta}).$$

由定义，对任意 $f\in H(U)$，有

$$(Rf)(ze^{i\theta})=-i\frac{\partial}{\partial\theta}(f(ze^{i\theta})) \quad . \tag{2.25}$$

由归纳和（2. 25），易知

$$\Delta_h^{r+s}f(z)=\int_0^h\cdots\int_0^h\frac{\partial^r}{\partial\theta_1\cdots\partial\theta_r}\Delta_h^s f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})d\theta_1\cdots d\theta_r$$

$$=\int_0^h\cdots\int_0^h\Delta_h^s\left(\frac{\partial^r}{\partial\theta_1\cdots\partial\theta_r}f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})\right)d\theta_1\cdots d\theta_r$$

$$=\int_0^h\cdots\int_0^h i^r(\Delta_h^s R^r f)(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})d\theta_1\cdots d\theta_r \quad . \tag{2.26}$$

对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，有

$$g(ze^{i\theta},we^{i\theta})=-\log\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|=g(z,w).$$

再由测度 $dm(z)$ 的旋转不变性可知

$$\begin{aligned}\|RP_k(z)\|_{Q_p}^2&=\sup_{w\in U}\int_U|(RP_k(z))'|^2g^p(z,w)dm(z)\\&=\sup_{w\in U}\int_U|(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2g^p(ze^{i\theta},w)dm(ze^{i\theta})\\&=\sup_{we^{i\theta}\in U}\int_U|(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2g^p(ze^{i\theta},we^{i\theta})dm(z)\\&=\sup_{w\in U}\int_U|(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2g^p(z,w)dm(z)\quad.\end{aligned}\tag{2.27}$$

由（2.26)，Minkowski 不等式，$m(z)$ 旋转不变性和（2.27)，我们有

$$\begin{aligned}&\|\Delta_h^{r+s}f\|_{Q_p}\\&=\left(\sup_{w\in U}\int_U|((\Delta_h^{r+s}f))'(z)|^2g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\sup_{w\in U}\int_U\left(\int_0^h\cdots\int_0^h|((\Delta_h^sR^rf))'(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})|d\theta_1\cdots d\theta_r\right)^2g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\int_0^h\cdots\int_0^h\left(\sup_{w\in U}\int_U(|((\Delta_h^sR^rf))'(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})|)^2g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}d\theta_1\cdots d\theta_r\\&=h^T\|\Delta_h^s(R^rf)\|_{Q_p}.\end{aligned}$$

定理 2.1.10　设 $0\leqslant p<\infty, r\in\mathrm{N}, a\geqslant r+2, k-1\in\mathrm{N}$. 若 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 和 $R^rf\in Q_p$，则

$$\left\|f(z)-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)}a_jz^j\right\|_{Q_p}$$
$$\leqslant C(a)k^{-r}\omega(1/k,R^rf,Q_p).$$

特别地，存在一正常数 C，独立于 f 和 k，满足

$$E_{k-1}(f,Q_p)\leqslant Ck^{-r}\omega(1/k,R^rf,Q_p),\ \forall R^rf\in Q_p.$$

证明：在（2.12）中取 $\eta=1$ 可得

$$|(f(z)-P_k[f](z))'|\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|(\Delta_\varphi^{r+1}f(z))'|dv_k^{\rho,1,a}(\varphi).$$

由 $\|\cdot\|_{Q_p}$ 定义和 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\| f-P_k[f]\|_{Q_p}\\
&=\left(\sup_{w\in U}\int_U |(f(z)-P_k[f](z))'|^2 g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\left(\sup_{w\in U}\int_U \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(\Delta_\varphi^{r+1}f(z))'|dv_k^{\rho,1,a}(\varphi)\right)^2 g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sup_{w\in U}\int_U |(\Delta_\varphi^{r+1}f(z))'|^2 g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} dv_k^{\rho,1,a}(\varphi)\\
&= C\int_{-\pi}^{\pi}\|\Delta_\varphi^{r+1}f(z)\|_{Q_p}dv_k^{\rho,1,a}(\varphi)\\
&\leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}\omega_{r+1}(|\varphi|, f, Q_p)dv_k^{\rho,1,a}(\varphi).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

取 $a\geqslant r+2$，即 $a+1\geqslant r+3$. 由引理 2.1.7，引理 2.1.6 和（2.28），可得

$$\begin{aligned}
E_{k-1}(f,Q_p)&\leqslant \| f-P_k[f]\|_{Q_p}\\
&\leqslant C\omega_{r+1}(1/k, f, Q_p)\int_{-\pi}^{\pi}(|k\varphi|+1)^{r+1}dv_k^{\rho,1,a}(\varphi)\\
&\leqslant C\omega_{r+1}(1/k, f, Q_p)\\
&\leqslant Ck^{-r}\omega(1/k, R^rf, Q_p),
\end{aligned}$$

其中最后一步使用了引理 2.1.9. 定理证毕.

由[23,28]可知两个模 $\|\cdot\|_{Q_1}$ 和 $\|\cdot\|_{BMOA}$ 是等价的. 对 BMO 空间也可参见[29,30]. 我们可直接得到下面推论.

推论 2.1.11 设 $0\leqslant p<\infty$，$r\in\mathbb{N}$，$a\geqslant r+2$，$k-1\in\mathbb{N}$. 若 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 和 $R^rf\in BMOA$，则

$$\left\| f(z)-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{m=1}^{r+1}(-1)^{m+1}\binom{r+1}{m}\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{m}\right]}\frac{\Gamma(k-mj+a)}{\Gamma(k-mj)}a_jz^j\right\|_{BMOA}$$

$\leqslant C(a)k^{-r}\omega(1/k, R^rf, BMOA)$.

特别地，存在一正常数 C，独立于 f 和 k，满足

$$E_{k-1}(f, BMOA)\leqslant Ck^{-r}\omega(1/k, R^rf, BMOA), \forall R^rf\in BMOA.$$

作为特例我们可单独给出 Q_p 空间中一阶的 Jackson 定理，它是与定理 2.1.1 类似结果.

定理 2.1.12 设 $0\leqslant p<\infty$，$a>1$，$k-1\in\mathbb{N}$. 若 $f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j\in$

Q_p，则

$$\left\| f(z)-\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+a)}{\Gamma(k-j)}a_j z^j\right\|_{Q_p}\leqslant C(a)\omega(1/k,f,Q_p).$$

特别地，存在一正常数 C，独立于 f 和 k，满足

$$E_{k-1}(f,Q_p)\leqslant C\omega(1/k,f,Q_p),\forall f\in Q_p,$$

很明显，定理 2.1.12 为定理 2.1.10 中 $r=0$ 的情况.

§2.2　星形圆型域上的 Q_μ 空间

令 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的圆型域，即对任意 $z\in D$ 及 $0\leqslant\theta<2\pi$，都有 $e^{i\theta}z\in D$.

设 Γ 是任意指标集，$\{\mu_a\}_{a\in\Gamma}$ 为 D 上一族非负 σ－有限 Borel 测度．本节我们固定 $0<p<\infty$. 空间 $Q_\mu=Q_\mu(D)=Q_{\mu,p}(D)$ 是由满足下列条件的全纯函数 f 构成：

$$\| f\|_{Q_\mu}=\sup_{a\in\Gamma}\left\{\int_D|\nabla f(z)|^p d\mu_a(z)\right\}^{1/p}<\infty,\qquad(2.29)$$

其中 $\nabla f(z)=(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z))$ 为 f 在 z 点的复梯度.

假设测度 $\{\mu_a(z)\}_{a\in\Gamma}$ 满足下列条件：

(i) $\|\cdot\|_{Q_\mu}$ 为半模，即

$$\| f\|_{Q_\mu}=0\Longrightarrow f=\text{const}.$$

(ii) Q_μ 包含所有多项式.

用 $H(D)$ 表示 D 上所有全纯函数的集合．如果 D 为包含原点的圆型域，则对任 $f\in H(D)$，存在齐次多项式展开

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}F_j(z),\qquad(2.30)$$

其中 $F_j(z)$ 为 j 次齐次多项式,该级数在 D 中紧收敛．我们考虑的重要算子

$$P_k[f](z)=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+b)}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\Gamma(k-j+b)}{\Gamma(k-j)}F_j(z),\qquad(2.31)$$

其中 f 具有展开式 (2.30)，$k\in\mathbb{N}$. 显然 $P_k[f]$ 为至多 $k-1$ 次多项式.

为了进行梯度估计我们需要引入 $[-\pi,\pi)$ 上的一些测度：

$$dm_k(\varphi) := |C_k^b|^s \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{s(1-k)} k^{1-s} T_{k+1}^{\frac{s(b+1)}{2}}(\varphi) d\varphi, \tag{2.32}$$

其中 $s = \min\{1, p\}$, b 为大于 $\frac{2}{s} - 1$ 的整数，$k \in \mathrm{N}$,

$$C_k^b = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(k)\Gamma(b+1)}{\Gamma(k+b)}, \tag{2.33}$$

和广义的 Jackson 核（参见[1]）

$$T_k^\beta(\varphi) = \left| \frac{\sin \frac{k\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right|^{2\beta}, \ \beta > 0.$$

测度 $dm_k(\varphi)$ 拥有重要性质（见引理 2.2.8）

$$\sup_{k \in \mathrm{N}} \int_{[-\pi,\pi)} (k|\varphi| + 1) dm_k(\varphi) < \infty \quad . \tag{2.34}$$

若域 $D \subseteq \mathrm{C}^n$ 又为星形的，即对任 $z \in D$，$\lambda \in \mathrm{C}$ 和 $|\lambda| < 1$，有 $\lambda z \in D$，则我们考虑穿过给定点 $z \in D$ 的截面

$$S_z = \{\lambda z \in D : \lambda \in C, |\lambda| < 1\}.$$

其边界为

$$\partial S_z = \{e^{i\varphi} z \in D : \varphi \in R\}.$$

我们通过函数在边界 ∂S_z 上的梯度估计给出算子 $P_k[\cdot]$ 点态梯度估计的上界（见下面定理 2.2.2），从而导出 Q_μ 空间上的 Jackson 定理（见定理 2.2.3）.

我们的主要结果如下：

定理 2.2.1 设 D 是星形域，$k \in \mathrm{N}$，和 $0 < \eta \leqslant s = \min\{1, p\}$. 若存在 $[-\pi, \pi)$ 上的测度 $d\lambda_k$ 和算子 $I_k : Q_\mu(D) \to H(D)$ 满足

$$\sup_{k \in \mathrm{N}} \int_{[-\pi,\pi)} (|k\varphi| + 1)^{\frac{\eta}{s}} d\lambda_k(\varphi) < \infty, \tag{2.35}$$

对任意 $f \in Q_\mu$，有

$$\begin{aligned} &|\nabla(I_k[f](z) - f(z))| \\ &\leqslant C(k) \left(\int_{[-\pi,\pi)} |\nabla(f(e^{i\varphi} z) - f(z))|^\eta d\lambda_k(\varphi) \right)^{\frac{1}{\eta}}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

则

$$\| I_k[f](z) - f(z) \|_{Q_\mu} \leqslant C(k) \omega(1/k, f, Q_\mu), \forall f \in Q_\mu.$$

定理 2.2.2　设 D 为星形圆型域和 $s \in (0,1]$. 则存在算子 $P_k[\cdot]$ 和测度 dm_k 满足 (2.36), (2.35)，使得对任意 $f \in H(D)$ 成立

$$|\nabla(P_k[f](z) - f(z))| \leqslant C(k)\left(\int_{[-\pi,\pi)} |\nabla(f(e^{i\varphi}z) - f(z))|^s dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}.$$

作为定理 2.2.1 和定理 2.2.2 的直接推论，从性质 (2.34) 得到 Q_μ 空间中的 Jackson 定理.

定理 2.2.3　设 D 为星形圆型域. 对任 $f \in Q_\mu$ 及 $k \in \mathrm{N}$，有

$$E_k(f, Q_\mu) \leqslant C(k)\omega(1/k,\ f,\ Q_\mu).$$

§2.2.1 积分公式

在 (2.38) 中将引入的算子 $P_k[\cdot]$ 提供最佳逼近多项式. 它在星形圆型域上有两个积分形式. 与算子 $P_k[\cdot]$ 关联的是 $[-\pi,\pi)$ 上的复测度:

$$d\mu_k^\rho(\varphi) = iC_k^b(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left[\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{b+1} d\varphi,$$

其中 $\rho \in (0,1]$，$k \in \mathrm{N}$，$b > 0$，C_k^b 为 (2.33) 中的常数.

测度 $d\mu_k^\rho(\varphi)$ 都为 $[-\pi,\pi)$ 上的概率测度，这从下面引理 2.2.4（取 $f \equiv 1$）可以看到.

当 $\rho = 1$ 时，我们也记

$$dv_k = d\mu_k^1(\varphi).$$

其全变差测度显然可由广义 Jackson 核函数给出

$$d|v_k| = |C_k^b| \cdot T_{k+1}^{\frac{b+1}{2}}(\varphi)d\varphi.$$

引理 2.2.4　设 D 为星形圆型域，$f \in H(D)$. 则对任意 $z \in D$，

$$P_k[f](z) = \int_{[-\pi,\pi)} f(\rho e^{i\varphi}z)d\mu_k^\rho(\varphi),\ \forall \rho \in (0,1], \tag{2.37}$$

$$P_k[f](z) = C_k^b \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}d\lambda,\ \forall \rho \in (0,1) \quad . \tag{2.38}$$

证明：对任意固定的 $\rho \in (0,1)$，通过变量代换 $\lambda = \rho e^{i\varphi}$ 有

$$\int_{[-\pi,\pi)} f(\rho e^{i\varphi}z)d\mu_k^\rho(\varphi) = C_k^b \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda z)\lambda^{-k}\left(\frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\right)^{b+1} d\lambda \quad . \tag{2.39}$$

现在利用二项式级数 $(1-w)^{b+1} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_l w^l$, $|w| < 1$，得到

$$(1-\lambda^{k+1})^{b+1} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} d_l \lambda^{(k+1)l}.$$

这样式（2.39）中积分的第二项可被分成两部分

$$f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}+\sum_{l=1}^{\infty}f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}d_l\lambda^{(k+1)l}.$$

因为第二项在单位圆盘上 $|\lambda|<1$ 是全纯的，由留数定理知积分在 $|\lambda|=\rho$ 上为 0，所以由剩下第一项得到

$$\int_{[-\pi,\pi)}f(\rho e^{i\varphi}z)d\mu_k^{\rho}(\varphi)=C_k^b\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}d\lambda.$$

记（2.38）中被积项为

$$g(\lambda)=f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}\quad. \tag{2.40}$$

因为 $g(\lambda)$ 在除原点外的单位圆盘上是全纯的，则由留数定理得

$$\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}d\lambda=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(g(\lambda),0)\quad. \tag{2.41}$$

计算上式中留数，利用 f 的齐次展开（见(2.30)）和应用二项式级数

$$(1-\lambda)^{-(b+1)}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(l+b+1)}{l!\,\Gamma(b+1)}\lambda^l$$

于（2.41）的左侧，得到 Laurent 展开

$$g(\lambda)=\sum_{l,j=0}^{\infty}F_j(z)\frac{\Gamma(l+b+1)}{l!\,\Gamma(b+1)}\lambda^{l+j-k}.$$

进而

$$\mathrm{Res}(g(\lambda),0)=\sum_{l+j=k-1}\frac{\Gamma(l+b+1)}{l!\,\Gamma(b+1)}F_j(z).$$

结合（2.41）的结果，我们得到

$$\begin{aligned}C_k^b\int_{|\lambda|=\rho}f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)}d\lambda&=2\pi iC_k^b\cdot\sum_{l+j=k-1}\frac{\Gamma(l+b+1)}{l!\,\Gamma(b+1)}F_j(z)\\&=P_k[f](z).\end{aligned}$$

这就证明了（2.37）和(2.38）中 $\rho\in(0,1)$ 的结果．对任给固定的点 $z\in D$ 通过取 $\rho\to1$，知道对 $\rho=1$，(2.37）也成立．引理得证．

§2.2.2 Jackson 定理

定理 2.2.1 意味着具有某种合适性质的算子的存在性，可推出 Jackson 定理．证明时需要一些引理．

我们考虑的测度为 σ—有限测度，因为这种测度具有 Minkowski 不等式：

引理 2.2.5[23]　设 Ω_1 和 Ω_2 是分别具有 σ—有限测度 μ_1 和 μ_2 的两个空间．令非负函数 f 在 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上是 $\mu\times\nu$—可测的．若 $1\leqslant p<\infty$，则

$$\left(\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}f(x,y)d\mu_2(y)\right)^p d\mu_1(x)\right)^{1/p}\leqslant\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}f(x,y)^p d\mu_1(x)\right)^{1/p}d\mu_2(y).$$

引理 2.2.6　设 $\delta>0$，$\lambda>0$，$0<p<\infty$，$s=\min\{1,p\}$．令 D 为 $\mathbb{C}^n$ 上的圆型域，则对任 $f\in Q_\mu=Q_{\mu,p}(D)$，

$$\omega(\lambda\delta,\ f,\ Q_\mu)\leqslant(\lambda+1)^{1/s}\omega(\delta,\ f,\ Q_\mu).$$

证明：由定义

$$\omega(\lambda\delta,\ f,\ Q_\mu)=\sup_{|\theta'-\theta''|<\lambda\delta}\|f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z)\|_{Q_\mu}.$$

考虑 $|\theta'-\theta''|<\lambda\delta<(m+1)\delta$，其中 $m=[\lambda]$ 表示小于等于 λ 的整数．不妨设 $\theta'<\theta''$，则取区间的等分

$$[\theta',\theta'')=\bigcup_{l=0}^{m}[\theta_l,\theta_{l+1}),$$

其中 $\theta_0=\theta'$ 和 $\theta_{l+1}=\theta_l+\dfrac{1}{m+1}(\theta''-\theta')$，$l=0,1,\cdots,m$. 我们现在记

$$D_j(f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z))=\sum_{l=0}^{m}D_j(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z)),D_j=\frac{\partial}{\partial_{Z_j}}. \tag{2.42}$$

由（2.42）和 Minkowski 不等式，

$$\begin{aligned}|\nabla f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z))|&=\left(\sum_{j=1}^{n}|D_j(f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{l=0}^{m}D_j(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|D_j(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sum_{l=0}^{m}|\nabla(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))|.\end{aligned}$$

利用简单的不等式：对 $0<s\leqslant1$ 和 a，$b\geqslant0$，有 $(a+b)^s\leqslant a^s+b^s$. 我们得到

$$|\nabla(f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z))|\leqslant\left(\sum_{l=0}^{m}|\nabla(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

这就得出了积分估计

$$\left(\int_D |\nabla(f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z))|^p d\mu_a(z)\right)^{\frac{s}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_D \left(\sum_{l=0}^{m} |\nabla(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))|^s\right)^{\frac{p}{s}} d\mu_a(z)\right)^{\frac{s}{p}}$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{m}\left(\int_D |\nabla(f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z))|^p d\mu_a(z)\right)^{\frac{s}{p}},$$

最后一步用到了 $p/s\geqslant 1$ 和 Minkowski 不等式.

现在我们在两侧取 $\sup_{a\in\Gamma}$并由 Q_p 及光滑模的定义，得到

$$\begin{aligned}\|f(e^{i\theta'}z)-f(e^{i\theta''}z)\|_{Q_\mu}^s &\leqslant \sum_{l=0}^{m}\|f(e^{i\theta_{l+1}}z)-f(e^{i\theta_l}z)\|_{Q_\mu}^s\\ &\leqslant (m+1)\omega^s(\delta, f, Q_\mu)\\ &\leqslant (\lambda+1)\omega^s(\delta, f, Q_\mu).\end{aligned}$$

所以，$\omega^s(\lambda\delta, f, Q_\mu)\leqslant(\lambda+1)\omega^s(\delta, f, Q_\mu)$，得证.

现在我们给出定理 2.2.1 的证明.

定理 2.2.1 的证明：由定义

$$\|I_k[f]-f\|_{Q_\mu}=\sup_{a\in\Gamma}\left(\int_D |\nabla(I_k[f](z)-f(z))|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}.$$

利用 (2.36) 和 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}&\|I_k[f]-f\|_{Q_\mu}\\ &\lesssim \sup_{a\in\Gamma}\left(\int_D\left(\int_{[-\pi,\pi]}|\nabla(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^\eta dm_k(\varphi)\right)^{\frac{p}{\eta}}d\mu_a(z)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\lesssim \sup_{a\in\Gamma}\left(\int_{[-\pi,\pi]}\left(\int_D|\nabla(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^p d\mu_a(z)\right)^{\frac{\eta}{p}}dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}\\ &=\left(\int_{[-\pi,\pi]}\|f(e^{i\varphi}z)-f(z)\|_{Q_\mu}^\eta dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}.\end{aligned}$$

由定义

$$\|f(e^{i\varphi}z)-f(z)\|_{Q_\mu}\leqslant\omega(|\varphi|, f, Q_\mu).$$

我们利用引理 2.2.6 和假定条件 (2.35) 可得到

$$\|I_k[f]-f\|_{Q_\mu}\leqslant\left(\int_{[-\pi,\pi]}\omega^\eta(|\varphi|, f, Q_\mu)dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

$$\lesssim \left(\omega^{\eta}(\frac{1}{k}, f, Q_{\mu})\int_{[-\pi,\pi]}(|k\varphi|+1)^{\frac{\eta}{s}}dm_{k}(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

$$\lesssim \omega\left(\frac{1}{k}, f, Q_{\mu}\right).$$

定理证毕．

§2.2.3　梯度估计

定理 2.2.2 是关于具有某种梯度估计的积分算子的存在性．证明该定理之前我们先来证明测度 $dm_k(\varphi)$ 的重要性质（2.35）．

我们考虑在 $[-\pi,\pi)$ 上的测度：

$$dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi) := |C_k^b|^{\eta}\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\eta(b+1)}{}^{\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!2}\;(\varphi)d\varphi, \tag{2.43}$$

其中 $0<\rho<1$，$\eta>0$，$b>0$．当 $\rho=1-\frac{1}{k}$，$\eta=s$，及 b 为大于 $\frac{2}{s}-1$ 的整数，有

$$dm_k = dv_k^{\rho,\eta,b}.$$

引理 2.2.7　设 $\beta>1$，$k\in\mathrm{N}$．则

$$\int_{[-\pi,\pi]}(|\varphi k|+1)T_k^{\beta}(\varphi)d\varphi = O(k^{2\beta-1})\text{，当 } k\to+\infty.$$

证明：我们先回忆两个简单不等式：

$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

$$|\sin kx| \leqslant k|\sin x|,\ \forall kx\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

后一个不等式可由对 k 归纳得到．记 $t=2\beta$．则

$$\int_{[-\pi,\pi]}(|\varphi k|+1)T_k^{\beta}(\varphi)d\varphi$$

$$\leqslant \int_{[-\pi,\pi]}\left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{k}{2}}\right|^{t}(|\varphi k|+1)d\varphi$$

$$= 2\int_{[0,\frac{\pi}{k}]}\left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{k}{2}}\right|^{t}(\varphi k+1)d\varphi + 2\int_{[\frac{\pi}{k},\pi]}\left|\frac{\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{k}{2}}\right|^{t}(\varphi k+1)d\varphi$$

$$\leqslant 2\int_{[0,\frac{\pi}{k}]} k^t(\varphi k+1)d\varphi + 2\pi^t\int_{[\frac{\pi}{k},\pi]} \varphi^{-t}(\varphi k+1)d\varphi$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2}{2}k^{t-1}+\pi k^{t-1}\right)+2\pi^t\left[\frac{k}{t-2}(k^{t-2}-1)\pi^{2-t}+\frac{1}{t-1}(k^{t-1}-1)\pi^{1-t}\right]$$

$$= O(k^{t-1}).$$

引理 2.2.8 设 $0<\eta\leqslant 1$，$b>\frac{2}{\eta}-1$，$\rho=1-\frac{1}{k}$，及 $k\in\mathrm{N}$. 则

$$\sup_{k\in\mathrm{N}}\int_{[-\pi,\pi]}(|k\varphi|+1)dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)<\infty.$$

证明：回忆

$$dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)=|C_k^b|^\eta\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(b+1)}{2}}(\varphi)d\varphi.$$

在引理 2.2.7 中用 $k+1$ 替换 k，有

$$\int_{[-\pi,\pi]}(|k\varphi|+1)T_{k+1}^{\frac{\eta(b+1)}{2}}(\varphi)d\varphi=O(k^{\eta(b+1)-1}).$$

注意到 $(1-\rho)^{\eta-1}=k^{1-\eta}$，$\rho^{\eta(1-k)}=O(1)$，和

$$|C_k^b|^\eta=\left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(b+1)}{2\pi\Gamma(k+b)}\right)^\eta=O(k^{-\eta b}).$$

综上，引理得证.

现在我们给出定理 2.2.2 的证明.

定理 2.2.2 的证明：为简化起见，记 D_j 为 $\frac{\partial}{\partial z_j}$. 由 (2.37) 中的积分公式可知：对任意固定 $\rho\in(0,1)$，

$$D_j(P_k[f]](z))=\int_{[-\pi,\pi)}D_j(f(\rho e^{i\varphi}z))d\mu_k^\rho(\varphi).$$

因为

$$d\mu_k^\rho(\varphi)=iC_k^b(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left[\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{b+1}d\varphi$$

为 $[-\pi,\pi)$ 上的概率测度，有

$$D_j(P_k[f](z)-f(z))=\int_{[-\pi,\pi)}D_j(f(\rho e^{i\varphi}z)-f(z))d\mu_k^\rho(\varphi).$$

这意味着

$$|D_j(P_k[f](z)-f(z))|\leqslant\int_{[-\pi,\pi)}|D_j(f(\rho e^{i\varphi}z)-f(z))|d|\mu_k^\rho|(\varphi)$$

$$\leqslant \rho^{1-k}\int_{[-\pi,\pi)} |h(\rho e^{i\varphi},z)|\,d\varphi,$$

其中

$$h(\rho e^{i\varphi},z)=C_k^b[(D_j f)(\rho e^{i\varphi}z)\rho e^{i\varphi}-D_j f(z)]\cdot\left[\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{b+1}.$$

注意到对任意 $b\in\mathbb{N}$，h（$\cdot$，z）在 $\overline{\mathrm{U}}$ 上全纯，由引理 2.1.3 知

$$|D_j(P_k[f](z)-f(z)|^\eta\lesssim\int_{[-\pi,\pi)}|D_j(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^\eta dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi),\tag{2.44}$$

其中 $\eta\in(0,1]$，$dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)$ 按(2.43)定义．因为

$$|\nabla f(z)|=(\sum_{j=1}^n|D_j f(z)|^2)^{1/2},$$

有

$$|\nabla(P_k[f](z)-f(z))|=\left(\sum_{j=1}^n|D_j(P_k[f](z)-f(z))|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^n|D_j(P_k[f](z)-f(z))|^\eta\right)^{\frac{1}{\eta}}.$$

利用（2.44）和 Hölder 不等式，我们可得

$$|\nabla(P_k[f](z)-f(z))|$$
$$\lesssim\left(\sum_{j=1}^n\int_{[-\pi,\pi)}|D_j(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^\eta dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}$$
$$=\left(\int_{[-\pi,\pi)}\sum_{j=1}^n|D_j(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^\eta dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}$$
$$\lesssim\left(\int_{[-\pi,\pi)}\left(\sum_{j=1}^n|D_j(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^2\right)^{\frac{\eta}{2}}dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}$$
$$=\left(\int_{[-\pi,\pi)}|\nabla(f(e^{i\varphi}z)-f(z))|^\eta dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)\right)^{\frac{1}{\eta}}.$$

若取 $\rho=1-\frac{1}{k}$ 和 $\eta=s$，则 $dv_k^{\rho,\eta,b}=dm_k$．定理得证．

§2.2.4　Q_μ 空间

本小节中，域 D 为 $\mathbb{C}^n$ 上的单位球 B. 我们会看到 Q_μ 空间至少在单位圆盘上统一了 $BMOA$，Q_p，Q_K 和 $F(p,q,s)$．本小节取特殊的 Q_μ 空间是由非负测度

$$d\mu_a(z)=h(z,a)dv(z)$$

给出的，其中 $h(\cdot,a)\in L^1_{loc}(\mathrm{B},dv)$，在任意点 $a\in\Gamma=\mathrm{B}$ 或 B 中任意开子集上，都有 $h(z,a)>0$.

用 $v(z)$ 表示单位球 B 上的规范化的 Lebesgue 测度，$\lambda(z)$ 为不变测度

$$d\lambda(z)=(1-|z|^2)^{-n-1}dv(z).$$

对 $f\in H(\mathrm{B})$，不变复梯度定义为

$$\widetilde{\nabla}f(z)=\nabla(f\circ\varphi_z)(0),$$

其中 φ_z 为 B 上双全纯 Möbius 变换满足 $\varphi_z(0)=z$ 和 $\varphi_z(z)=0$. 不变 Green 函数定义为 $G(z,a)=g(\varphi_a(z))$，其中

$$g(z)=\frac{n+1}{2n}\int_{|z|}^{1}(1-t^2)^{n-1}t^{-2n+1}dt.$$

BMOA 是有界平均振动全纯函数空间，其具有等价刻画（参见[31]）

$$f\in\mathrm{BMOA}(\mathrm{B})\Longleftrightarrow\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\widetilde{\nabla}f(z)|^2G(z,a)d\lambda(z)<\infty.$$

BMOA 的推广为 Q_p 空间

$$Q_p=\{f\in H(\mathrm{B}):\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\widetilde{\nabla}f(z)|^2G^p(z,a)d\lambda(z)<+\infty\}.$$

Q_p 空间[18,32]统一了 BMOA 和 Bloch 空间：$Q_1=BMOA$ 和 $Q_p=$Bloch 空间.

Essén 和 Wulan[33,34]推广了 Q_p 空间，引入了 Q_K 空间

$$Q_K=\{f\in H(\mathrm{B}):\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\widetilde{\nabla}f(z)|^2K(G(z,a))d\lambda(z)<+\infty\},$$

其中 K：$(0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$ 为右连续，非负，不恒为零的函数.

Q_p 的另一个推广是 $F(p,q,s)$（参见[35]）：

$$F(p,q,s)=\{f\in H(\mathrm{B}):\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\nabla f(z)|^p(1-|z|^2)^q g^s(z,a)dv(z)<\infty\},$$

其中 $g(z,a)=\log|\varphi_a(z)|^{-1}$ 为 B 上的 Green 函数，$0<p$，$s<\infty$，和 $-n-1<q<\infty$.

空间 $F(p,q,s)$ 统一了 Q_p 空间，Bergman 空间和 Hardy 空间（参见[18,35]）；特别地，在单位圆盘 U 上（参见[19]），

$$F(2,-2,p)=Q_p.$$

在 Q_p 空间中建立 Jackson 定理的关键是 Q_p 空间按照两个等价半模的刻画：

$$\|f\|_{Q_p}=\sup_{a\in \mathrm{B}}\left\{\int_{\mathrm{B}}|\widetilde{\nabla} f(z)|^2 G^p(z,a)d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|f\|_{Q_p}^{*}=\sup_{a\in \mathrm{B}}\left\{\int_{\mathrm{B}}|\nabla f(z)|^2(1-|z|^2))^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

若$\frac{n-1}{n}<p<\frac{n}{n-1}$，则（参见[27,36]）

$$\|f\|_{Q_p}<\infty\Longleftrightarrow\|f\|_{Q_p}^{*}<\infty.$$

下列结果表明这两个半模等价.

引理 2.2.9　设$\frac{n-1}{n}<p<\frac{n}{n-1}$. 则

$$\|\cdot\|_{Q_p}^{*}\simeq\|\cdot\|_{Q_p}. \tag{2.45}$$

证明：显然知$\|\cdot\|_{Q_p}$和$\|\cdot\|_{Q_p}^{*}$都为半模（参见[32]）. 记

$$|||f|||_{Q_p}=|f(0)|+\|f\|_{Q_p},\quad |||f|||_{Q_p}^{*}=|f(0)|+\|f\|_{Q_p}^{*}.$$

众所周知，采用$|||\cdot|||_{Q_p}$模，则 Q_p 为 Möbius 不变 Banach 空间. 现证明采用另一模$|||\cdot|||_{Q_p}^{*}$，Q_p 空间也为完备的.

记 $E(a,r)=\{z\in \mathrm{B}:|\varphi_a(z)|<r\}$，其中 $0<r<\frac{1}{2}$. 则对任 $z\in E(a,r)$，有

$$1-|\varphi_a(z)|^2\simeq 1,1-|z|^2\simeq 1-|a|^2.$$

若 $f\in H(\mathrm{B})$，则$|\nabla f(z)|^2$ 为次调和的（参见[5]），所以

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{B}}|\nabla f(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\
\geqslant&\int_{E(a,r)}|\nabla f(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\
\gtrsim&(1-|a|^2)^2\int_{E(a,r)}|\nabla f(z)|^2 d\lambda(z)\\
\gtrsim&(1-|a|^2)^2|\nabla f(a)|^2.
\end{aligned}$$

两侧取 $\sup_{a\in \mathrm{B}}$，有

$$\|f\|_{\mathrm{B}}\lesssim\|f\|_{Q_p}^{*}, \tag{2.46}$$

其中$\|\cdot\|_{\mathrm{B}}$为 Bloch 空间中的半模（参见[37]）.

令$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$为取模$|||\cdot|||_{Q_p}^{*}$的 Q_p 空间内的 Cauchy 序列. 由（2.46），

$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$也为 Bloch 空间内的 Cauchy 序列．从 Bloch 空间的完备性，存在 $f \in H(\mathrm{B})$满足：当 $k\to\infty$，$f_k\to f$ 在 B 紧子集上一致收敛．因此，对任 $j=1, 2, \cdots, n$

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_j}\to\frac{\partial f}{\partial z_j}，当 k\to\infty，$$

在 B 紧子集上也为一致收敛．对任 $\varepsilon>0$，取一正整数 N，满足

$$\|f_m-f_k\|_{Q_p}^{*}<\varepsilon，当 k，m>N.$$

由 Fatou 引理，当 $m>N$，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{B}}|\nabla(f_m-f)(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\ =&\int_{\mathrm{B}}\lim_{k\to\infty}|\nabla(f_m-f_k)(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\ \leqslant&\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathrm{B}}|\nabla(f_m-f_k)(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\ \leqslant&\lim_{k\to\infty}\|f_m-f_k\|_{Q_p}^{*2}\\ \leqslant&\varepsilon^2.\end{aligned}$$

取 $\sup_{a\in\mathrm{B}}$可得

$$\lim_{m\to\infty}\|f_m-f\|_{Q_p}^{*2}=0.$$

由三角不等式，

$$\|f\|_{Q_p}^{*}\leqslant\|f_N-f\|_{Q_p}^{*}+\|f_N\|_{Q_p}^{*}\leqslant\varepsilon+\|f_N\|_{Q_p}^{*}<\infty，$$

因此 $f\in Q_p$．这证明了取模$|||f|||_{Q_p}^{*}$的 Q_p 空间为完备的．

当 $n\geqslant2$ 和 $z\in\mathrm{B}\setminus\{a\}$，有（参见[32]）

$$G(z,a)=g(\varphi_a(z))\simeq(1-|\varphi_a(z)|^2)^n|\varphi_a(z)|^{-2(n-1)}，$$

因此

$$(1-|\varphi_a(z)|^2)^n\lesssim G(z,a).$$

因为对 $f\in H(\mathrm{B})$，$(1-|z|^2)|\nabla f(z)|\leqslant|\widetilde{\nabla}f(z)|$，得到

$$\begin{aligned}&\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\nabla f(z)|^2(1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np}d\lambda(z)\\ \lesssim&\sup_{a\in\mathrm{B}}\int_{\mathrm{B}}|\widetilde{\nabla}f(z)|^2G^p(z,a)d\lambda(z)，\end{aligned}$$

即

$$|||f|||^*_{Q_p} \lesssim |||f|||_{Q_p}.$$

由开映射定理知

$$|||f|||^*_{Q_p} \simeq |||f|||_{Q_p}.$$

这就证明了 $\|f\|^*_{Q_p} \simeq \|f\|_{Q_p}$.

由 Q_μ 定义（2.29）和引理 2.2.9，易知

$$Q_\mu = \begin{cases} BMOA, & 若\ d\mu_a(z) = (1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^n d\lambda(z), \\ Q_p, & 若\ d\mu_a(z) = (1-|z|^2)^2(1-|\varphi_a(z)|^2)^{np} d\lambda(z), \\ Q_K, & 若\ d\mu_a(z) = K(G(z,a))d\lambda(z), \quad n=1, \\ F(p,q,s), & 若\ d\mu_a(z) = (1-|z|^2)^q g^s(z,a)dv(z) \end{cases}$$

因为空间 Q_μ 统一了上述函数空间，我们得到定理 2.2.3 的直接推论.

推论 2.2.10　对任 $k\in \mathrm{N}$，有

$$E_k(f, BMOA) \lesssim \omega(1/k, f, BMOA),$$
$$E_k(f, Q_p) \lesssim \omega(1/k, f, Q_p),$$
$$E_k(f, Q_K) \lesssim \omega(1/k, f, Q_K), 若\ n=1,$$
$$E_k(f, F(p,q,s)) \lesssim \omega(1/k, f, F(p,q,s)).$$

§2.3　其他空间

这节里，我们来给出其他一些全纯函数空间多项式逼近的正定理．我们仍采用本章 2.2 节中给出的符号和定义.

§2.3.1　逼近点态估计

首先回忆，我们所取的重要算子 $P_k[f]$（见(2.31)）：

$$P_k[f](z) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+b)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(k-j+b)}{\Gamma(k-j)} F_j(z),$$

其中 $k\in \mathrm{N}$.

我们已知 $P_k[f]$ 为至多 $k-1$ 次多项式且具有积分形式（见引理 2.2.4）:

$$P_k[f](z) = \int_{[-\pi,\pi)} f(\rho e^{i\varphi} z) d\mu_k^\rho(\varphi), \forall \rho \in (0,1], \tag{2.47}$$

$$P_k[f](z) = C_k^b \int_{|\lambda|=\rho} f(\lambda z)\lambda^{-k}(1-\lambda)^{-(b+1)} d\lambda, \forall \rho \in (0,1)\quad . \tag{2.48}$$

引入［$-\pi$，π）上的正测度：

$$dm_k(\varphi):=|C_k^b|^s\left(1-\frac{1}{k}\right)^{s(1-k)}k^{1-s}T_{k+1}^{\frac{s(b+1)}{2}}(\varphi)d\varphi, \tag{2.49}$$

其中 $s=\min\{1, p\}$，b 为大于$\frac{2}{s}-1$ 的整数，$k\in\mathrm{N}$，广义 Jackson 核

$$T_k^\beta(\varphi)=\left|\frac{\sin\frac{k\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|^{2\beta}, \beta>0.$$

在区间［$-\pi$，π）上另一测度：

$$dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi):=|C_k^b|^\eta\rho^{\eta(1-k)}(1-\rho)^{\eta-1}T_{k+1}^{\frac{\eta(b+1)}{2}}(\varphi)d\varphi, \tag{2.50}$$

其中 $0<\rho<1$，$\eta>0$，$b>0$. 结合（2.49）和（2.50），易知

$$dm_k=dv_k^{\rho,\eta,b},$$

其中 $\rho=1-\frac{1}{k}$，$\eta=s$ 和 b 为大于$\frac{2}{s}-1$ 的整数.

定理 2.3.1 设 D 为星形圆型域，$f\in H(D)$ 和 $s\in(0, 1]$. 则存在正常数 $C(k)$ 满足

$$|P_k[f](z)-f(z)|\leqslant C(k)\left(\int_{[-\pi,\pi)}|f(e^{i\varphi}z)-f(z)|^s dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{2.51}$$

其中测度 $dm_k(\varphi)$ 具有重要性质

$$\sup_{k\in\mathrm{N}}\int_{[-\pi,\pi)}(k|\varphi|+1)dm_k(\varphi)<\infty \quad . \tag{2.52}$$

证明：对任固定的 $\rho\in(0, 1)$，我们利用积分公式（2.47）

$$P_k[f](z)=\int_{[-\pi,\pi)}f(\rho e^{i\varphi}z)d\mu_k^\rho(\varphi).$$

因为

$$d\mu_k^\rho(\varphi)=iC_k^b(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left[\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{b+1}d\varphi$$

为［$-\pi$，π）上的概率测度，所以有

$$P_k[f](z)-f(z)=\int_{[-\pi,\pi)}(f(\rho e^{i\varphi}z)-f(z))d\mu_k^\rho(\varphi).$$

这意味着

$$|P_k[f](z)-f(z)| \leqslant \int_{[-\pi,\pi)} |f(\rho e^{i\varphi}z)-f(z)|\, d|\mu_k^{\rho}|(\varphi)$$

$$\leqslant \rho^{1-k}\int_{[-\pi,\pi)} |h(\rho e^{i\varphi},z)|\, d\varphi,$$

其中

$$h(\rho e^{i\varphi},z) = C_k^b \cdot [f(\rho e^{i\varphi}z)-f(z)] \cdot \left[\frac{(1-\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{b+1}.$$

注意到：对任意 $b\in \mathrm{N}$，$h(\cdot, z)$ 在 $\overline{U}$ 上全纯，由引理 2.1.3 知

$$|P_k[f](z)-f(z)|^{\eta} \lesssim \int_{[-\pi,\pi)} |f(e^{i\varphi}z)-f(z)|^{\eta} dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi),$$

其中 $\eta\in(0,1]$ 和 $dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)$ 依照(2.51) 定义.

若取 $\rho=1-\dfrac{1}{k}$ 及 $\eta=s$，则 $dv_k^{\rho,\eta,b}(\varphi)=dm_k(\varphi)$. 定理得证.

注：由引理 2.2.8 知，关于测度 $dm_k(\varphi)$ 的重要性质(2.52) 成立.

§2.3.2　Hardy 型空间

本小节我们来考虑 Hardy 型函数空间 A_μ 中的 Jackson 定理.

同样 D 表示 C^n 上的星形圆型域 . Hardy 型空间 $A_\mu=A_\mu(D)=A_{\mu,p}(D)$ 为这样的函数全体：$f\in \mathrm{H}(\mathrm{D})$ 且满足

$$\|f\|_{A_\mu} = \sup_{a\in\Gamma}\left\{\int_D |f(z)|^p d\mu_a(z)\right\}^{1/p} < \infty, \tag{2.53}$$

其中 Γ 为任意指标集，和 $\{\mu_a\}_{a\in\Gamma}$ 是 D 上的一族非负 σ 有限 Borel 测度且使所有多项式包含在 A_μ 中.

Hardy 型空间 A_μ 包含了 Hardy 空间，Bergman 空间和 Fock 空间 . 为看清这一点，我们仅需注意到：在多圆柱 U^n 上，$A_{\mu,p}(D)$ 为 Hardy 空间 $H^p(U^n)$，若取

$$d\mu_a(rz') \equiv \chi_{r\partial U^n}(z)d\sigma(z'), a=r\in(0,1),$$

$A_{\mu,p}(D)$ 为 Bergman 空间 $L_a^p(U^n)$，若取

$$d\mu_a(z)\equiv dV(z).$$

这里 $d\sigma(z')$ 表示 ∂U^n上的 Lebesgue 测度，$dV(z)$ 为 U^n上的 Lebesgue 测度.

Hardy 型空间 A_μ 也包含了 Fock 空间（或称 Segal－Bargmann 空间）. 的确，Fock 空间为 A_μ 空间的特例：只要取 $p=2$，$D=\mathrm{C}^n$ 和 $d\mu_a(z)=e$

$-|z|^m dV(z)$，其中 $m>0$，$dV(z)$ 为 C^n 上的 Lebesgue 测度．关于 Fock 空间，可参见[38,39,40,41]等．

引理 2.3.2 设 $\delta>0$，$\lambda>0$，$0<p<\infty$ 和 $s=\min\{1,p\}$．则对任意 $f\in A_\mu=A_{\mu,p}(D)$，有

$$\omega(\lambda\delta, f, A_\mu)\leqslant(\lambda+1)^{1/s}\omega(\delta, f, A_\mu).$$

证明：证明类似于引理 2.2.6，甚至更为简单．

现在我们来证明 A_μ 空间中的 Jackson 定理．

定理 2.3.3 设 D 为星形圆型域．对任 $f\in A_\mu$ 和 $k\in \mathrm{N}$，

$$E_k(f,A_\mu)\leqslant C(k)\omega(1/k, f, A_\mu).$$

证明：由定义

$$\| P_k[f]-f\|_{A_\mu}=\sup_{a\in\Gamma}(\int_D(|P_k[f](z)-f(z)|^p d\mu_a(z))^{1/p}.$$

从定理 2.3.1 和 Minkowski 不等式，可得

$$\begin{aligned}&\| P_k[f]-f\|_{A_\mu}\\ \lesssim&\sup_{a\in\Gamma}(\int_D(\int_{[-\pi,\pi)}|f(e^{i\varphi}z)-f(z)|^s dm_k(\varphi))^{\frac{p}{s}}d\mu_a(z))^{\frac{1}{p}}\\ \lesssim&\sup_{a\in\Gamma}\left(\int_{[-\pi,\pi)}\left(\int_D|f(e^{i\varphi}z)-f(z)|^p d\mu_a(z)\right)^{\frac{s}{p}}dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\\ =&(\int_{[-\pi,\pi)}\| f(e^{i\varphi}z)-f(z)\|^s_{A_\mu}dm_k(\varphi))^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

由定义，$\| f(e^{i\varphi}z)-f(z)\|_{A_\mu}\leqslant\omega(|\varphi|, f, A_\mu)$，所以利用引理 2.2.6 和引理 2.2.7 得到

$$\begin{aligned}\| P_k[f]-f\|_{A_\mu}&\leqslant\left(\int_{[-\pi,\pi)}\omega^s(|\varphi|, f, A_\mu)dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\lesssim\left(\omega^s(\frac{1}{k}, f, A_\mu)\int_{[-\pi,\pi)}(|k\varphi|+1)dm_k(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\\ &\lesssim\omega(\frac{1}{k}, f, A_\mu).\end{aligned}\tag{2.54}$$

定理得证．

§2.3.3 Bloch 型空间

本小节中，限定 D 为 C^n 中 Banach 空间的单位球且模为 $\|\cdot\|$．Bloch 型

空间 $B^{\alpha}(D)$ 定义为

$$B^{\alpha}(D) := \{f \in H(D) : \sup_{z \in \mathrm{D}} (1 - \|z\|^2)^{\alpha} |Rf(z)| < \infty\}.$$

与证明引理 2.2.6 相同，易得下面结果.

引理 2.3.4　设 $f \in B^{\alpha}(D)$ 和 λ, $\delta > 0$. 则

$$\omega(\lambda\delta, f, B^{\alpha}(D)) \lesssim (\lambda + 1)\omega(\delta, f, B^{\alpha}(D)).$$

定理 2.3.5　对任意 $f \in B^{\alpha}(D)$ 和 $k \in \mathrm{N}$，有

$$E_k(f, B^{\alpha}(D)) \lesssim \omega\left(\frac{1}{k}, f, B^{\alpha}(D)\right).$$

证明：令 $P_k[f]$ 为(2.31) 的多项式 . 则

$$R(P_k[f] - f)(z) = P_k[Rf](z) - Rf(z) \in H(D).$$

取定理 2.3.1 中 $\eta = 1$，我们得

$$|P_k[Rf](z) - Rf(z)| \leqslant \int_{[-\pi, \pi)} |Rf(e^{i\varphi}z) - Rf(z)| d\nu_k^{\rho, 1, b}(\varphi),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\|P_k[f] - f\|_{B^{\alpha}(D)} \\
&= \sup_{z \in \mathrm{D}} (1 - \|z\|^2)^{\alpha} |R(P_k[f] - f)(z)| \\
&\lesssim \sup_{z \in \mathrm{D}} \int_{[-\pi, \pi)} (1 - \|z\|^2)^{\alpha} |Rf(e^{i\varphi}z) - Rf(z)| d\nu_k^{\rho, 1, b}(\varphi) \\
&\leqslant \int_{[-\pi, \pi)} \omega(|\varphi|, f, B^{\alpha}(D)) d\nu_k^{\rho, 1, b}(\varphi).
\end{aligned}$$

取 $b > 1$，则由引理 2.3.4 和引理 2.2.8 知

$$E_k(f, B^{\alpha}(D)) \leqslant E_{k-1}(f, B^{\alpha}(D)) \leqslant \|P_k[f] - f\|_{B^{\alpha}(D)} \lesssim \omega(1/k, f, B^{\alpha}(D)).$$

§2.3.4　D 代数

在本小节中，我们限定 D 为 C^n 中的有界星形圆型域 . D 代数 $A(D)$ 为 D 上可连续延拓至 D 的拓扑边界 ∂D 的全纯函数全体，其模取为

$$\|f\|_{A(D)} = \max_{z \in \overline{\mathrm{D}}} |f(z)|.$$

固定 l, $\beta \in \mathrm{N}$，定义

$$I_k[f](z) = \frac{1}{B_{k,\beta}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{u=1}^{l} (-1)^{1+u} \binom{l}{u} f(e^{iu\varphi}z) T_k^{\beta}(\varphi) d\varphi,$$

其中

$$B_{k,\beta}:=\int_{-\pi}^{\pi}T_k^\beta(\varphi)d\varphi.$$

在 D 代数中，我们是用光滑模代替连续模来考虑逼近问题，所以我们的结果深化了定理 2.3.1. 其证明利用积分算子 I_k 给出逼近多项式．注意这里我们用算子 I_k 取代了算子 P_k. 在证明 $A(D)$ 中主要结果前，需要一些引理．

引理 2.3.6（参见[1]）设 k，$\beta\in\mathrm{N}$.

1. 存在常数 $C_{l,\beta}(k)$，满足

$$T_k^\beta(\varphi)=\sum_{l=0}^{\beta(k-1)}C_{l,\beta}(k)\cos l\varphi.$$

2. 存在一个常数 C_β 使得

$$\int_0^\pi\varphi^u T_k^\beta(\varphi)d\varphi\leqslant C_\beta k^{2\beta-u-1},u=0,1,\cdots,2\beta-2.$$

引理 2.3.7　对任意 $f\in A(D)$ 和 $k\in\mathrm{N}$，$I_k[f](z)$ 为至多 $\beta(k-1)$ 次多项式．

证明：从齐次展开式 $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}F_j(z)$，和引理 2.3.6 知：对任意 $u=1$，2，…，l，

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{iu\varphi}z)T_k^\beta(\varphi)d\varphi\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}F_j(z)e^{iju\varphi}.\sum_{l=0}^{\beta(k-1)}C_l\cos l\varphi d\varphi\\&=\sum_{ju\leqslant\beta(k-1)}C_{ju}F_j(z)\int_{-\pi}^{\pi}e^{iju\varphi}\cos ju\varphi d\varphi.\end{aligned}$$

从而知 $I_k[f](z)$ 为次数至多 $\beta(k-1)$ 的多项式．

引理 2.3.8（参见［42］）　设 $0<\delta$，$\lambda<+\infty$，$f\in A(U)$．则

$$\omega_l(\lambda\delta,f,A(U))\leqslant(\lambda+1)^l\omega_l(\delta,f,A(U)).$$

引理 2.3.9　设 $0<\delta$，$\lambda<+\infty$，$f\in A(D)$．则

$$\omega_l(\lambda\delta,f,A(D))\leqslant(\lambda+1)^l\omega_l(\delta,f,A(D)).$$

证明：对任意 $\zeta\in\partial D$，考虑 f 的 slice 函数 f_ζ，即 $f_\zeta(w)=f(w\zeta)$，$w\in U$．则由引理 2.3.8 知

$$\omega_l(\lambda\delta, f_\zeta, A(U)) \leqslant (\lambda+1)^l \omega_l(\delta, f_\zeta, A(U)).$$

由定义 1.2.1，对任意 $\zeta \in \partial D$

$$\omega_l(\delta, f_\zeta, A(U)) \leqslant \omega_l(\delta, f, A(D)),$$

所以

$$\omega_l(\lambda\delta, f_\zeta, A(U)) \leqslant (\lambda+1)^l \omega_l(\delta, f_\zeta, A(U)).$$

再由定义 1.2.1，得到

$$\omega_l(\lambda\delta, f, A(D)) \leqslant (\lambda+1)^l \omega_l(\delta, f, A(D)).$$

引理 2.3.10　设 X 为 D 上具有半模 $\|\cdot\|_X$ 的函数空间．则对任意 $f \in X$ 和 l，$k \in \mathrm{N}$，

$$E_k(f, X) \lesssim \omega_l(1/k, f, X),$$

成立的充分条件为

1. 存在 $s>0$ 满足：对任意 $\lambda, \delta \in [0,\infty)$，

有 $\omega_l^s(\lambda\delta, f, X) \leqslant (\lambda+1)\omega_l^s(\delta, f, X)$.

2. 对任意 $m \in \mathrm{N}$，存在两个常数 s_1，$s_2 \in \mathrm{N}$ 和一个至多 $s_1(m-s_2)$ 次的多项式 $G_m[f]$，满足 $\|G_m[f]-f\|_X \lesssim \omega_l(1/m, f, x)$.

证明：固定 $k \in \mathrm{N}$. 取 $m=[k/s_1]+s_2$，则 $s_1(m-s_2) \leqslant k$，所以 $G_m[f]$ 为次数至多 k 的多项式．由假设可得

$$\begin{aligned}\|G_m[f]-f\|_x^s &\lesssim \omega_l^s(1/m, f, X)\\ &\lesssim \left(\left|\frac{k}{m}\right|+1\right)\omega_k^s(1/k, f, X)\\ &\lesssim \omega_l^s(1/k, f, X).\end{aligned}$$

因为 $E_k(f, X)=\inf\limits_{Q_k \in P_k}\|f-Q_k\|_X$，所以

$$E_k(f,X) \leqslant \|G_m[f]-f\|_X.$$

结合上面结果，有 $E_k(f, X) \lesssim \omega_l(1/k, f, X)$，得证．

定理 2.3.11　设 $f \in A(D)$．则对任 k，$l \in \mathrm{N}$，

$$E_k(f, A(D)) \lesssim \omega_l\left(\frac{1}{k}, f, A(D)\right).$$

证明：对任 $\zeta \in \partial D$，由 $\Delta_{2\varphi}^l f(\zeta)$ 定义和引理 2.3.9，我们得到

$$|I_k[f](\zeta)-f(\zeta)| = \frac{2}{B_{k,\beta}}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^{l+1}\Delta_{2\varphi}^l f(\zeta)T_k^\beta(2\varphi)d\varphi\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{B_{k,\beta}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega_l(2|\varphi|, f, A(D))T_k^\beta(2\varphi)d\varphi$$

$$\leqslant \frac{4}{B_{k,\beta}}\omega_l\left(\frac{1}{k}, f, A(D)\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2k\varphi)^l T_k^\beta(2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{2}{B_{k,\beta}}\omega_l\left(\frac{1}{k}, f, A(D)\right)\int_0^{\pi}\sum_{u=0}^{l}\binom{l}{u}(k\varphi)^u T_k^\beta(\varphi)d\varphi.$$

取 $2\beta\geqslant l+2$. 利用引理 2.3.6，可知

$$|I_k[f](\zeta)-f(\zeta)|\leqslant C_\beta\omega_l\left(\frac{1}{k}, f, A(D)\right).$$

所需结果可由引理 2.3.9 和引理 2.3.10 得到.

§2.3.5 Lipschitz 空间

令 D 为 C^n 中的有界星形圆型域 . $Lip_\gamma^m(D)$ 由满足下列条件的 $f\in A(D)$ 构成：

$$|D^\alpha f(e^{ih}\zeta)-D^\alpha f(\zeta)|\leqslant L|h|^\gamma$$

对任意 $|\alpha|\leqslant m$ 和 $\zeta\in\partial D$ 成立，其中 L 为与 ζ 无关的常数.

定理 2.3.12 设 $f\in Lip_\gamma^m$ (D) . 则

$$E_k(f, A(D))\leqslant L\frac{C_{m,\gamma}}{k^{m+\gamma}}, \forall k\in\mathrm{N}.$$

证明：由定义，易知：对任意 $f\in A(D)$

$$\Delta_h^{m+1}f(e^{i\theta_0}\zeta)$$

$$=\int_{[0,h]^{m+1}}\frac{d^{m+1}f}{d\theta^{m+1}}(e^{i(\theta_0+r_1+\cdots+r_m+r_{m+1})}\zeta)dr_{m+1}dr \tag{2.55}$$

$$=\int_{[0,h]^m}\frac{d^m f}{d\theta^m}(e^{i(\theta_0+h+r_1+\cdots+r_m)}\zeta)-\frac{d^m f}{d\theta^m}(e^{i(\theta_0+r_1+\cdots+r_m)}\zeta)dr,$$

其中

$$d_r=d_{r_1}\cdots d_{r_m}.$$

若 $f\in Lip_\gamma^m$ (D)，则 $D^\alpha f\in Lip_\gamma(D)$, $|\alpha|\leqslant m$. 所以

$$|D^\alpha f(e^{ih}\zeta)-D^\alpha f(\zeta)|\leqslant L|h|^\gamma.$$

因为

$$\frac{df}{d\theta}(e^{i\theta}\zeta) = i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}(e^{i\theta}\zeta)e^{i\theta}\zeta_j,$$

我们有，对任意 $0<\gamma\leqslant 1$，

$$\left|\frac{df}{d\theta}(e^{ih}\zeta)-\frac{df}{d\theta}(\zeta)\right| \lesssim \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(e^{ih}\zeta)e^{ih}-\frac{\partial f}{\partial z_j}(\zeta)\right|$$

$$\lesssim \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(e^{ih}\zeta)\right||e^{\mathrm{ih}}-1|+\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(e^{ih}\zeta)-\frac{\partial f}{\partial z_j}(\zeta)\right|$$

$$= O(h^{\gamma}).$$

这意味着 $\frac{df}{d\theta}(e^{i\theta}\zeta)$ 作为关于 θ 的函数是次数 γ 的 Lipschitz 函数．由定义，我们知：$\frac{d^m f}{d\theta^m}(e^{i\theta}\zeta)$ 作为 θ 的函数也为次数 γ 的 Lipschitz 函数．

因此由公式（2.55）知

$$|\Delta_h^{m+1}f(\zeta)|\leqslant L|h|^{m+\gamma}.$$

所以，

$$\omega_{m+1}\left(\frac{1}{k},f,A(D)\right)\leqslant\frac{1}{k^{m+1}}.$$

由定理 2.3.11 可得到所需结果．

§2.3.6　Besov 空间

本小节中，我们总假定 D 为 C^n 中的单位球 B 或单位多圆柱 U^n．我们取定测度 $d\mu_a$ 为旋转不变的，即，下面有一项是成立的：

（ⅰ）对任意 $z\in D$，$a\in\Gamma$ 和 $\theta\in\mathrm{R}$，有 $d\mu_a(z)=d\mu_a(e^{i\theta}z)$.

（ⅱ）对任意 $z\in D$，$a\in\Gamma$ 和 $\theta\in\mathrm{R}$，有 $d\mu_a(z)=d\mu_{e^{i\theta}a}(e^{i\theta}z)$.

第二种情况下，指标集 Γ 被要求在 $e^{i\theta}$ 下不变，即任 $a\in\Gamma$，总有 $ae^{i\theta}\in\Gamma$.

这里 Besov 空间 A_μ^k 定义为满足下列条件的所有 $f\in H(D)$ 集合：对任意 $|\beta|\leqslant k$，有 $D^\beta f\in A_\mu$.

引理 2.3.13　设 $g\in H(D)$ 和 $0<p<\infty$，则对任意有 $\delta\in(0,1]$，有

$$\omega(\delta,g,A_\mu)\lesssim\delta\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial g}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}.$$

证明：我们仅需证明对任意 $h\in(0,\delta)$ 和 $a\in r$，

$$\left(\int_D |g(e^{ih}z)-g(z)|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p} \lesssim \delta\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial g}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}.$$

注意到

$$|g(e^{ih}z)-g(z)| = \left|\int_0^h \frac{dg}{d\theta}(e^{i\theta}z)d\theta\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\int_0^h \left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(e^{i\theta}z)\right| d\theta \quad . \tag{2.56}$$

对 $1\leqslant p<\infty$，由 Minkowski 不等式知

$$\begin{aligned}\left(\int_D |g(e^{ih}z)-g(z)|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p} &\lesssim \sum_{j=1}^{n}\left(\int_D\left(\int_0^h\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(e^{i\theta}z)\right|d\theta\right)^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}\\ &\lesssim \sum_{j=1}^{n}\int_0^h\left(\int_D\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(e^{i\theta}z)\right|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}d\theta\\ &\leqslant \delta\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial g}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}.\end{aligned}$$

其中最后一步使用了 μ_a 旋转不变的性质.

下面证明 $0<p<1$ 情况，记 $g_z(re^{i\theta}) = g(re^{i\theta}z)$. 则对任 $z\in\Omega$，$g_z\in H(\overline{U})$. 注意到：若 $f\in H(\overline{U})$ ，则对任意 $0<p<1$（参见[21]），

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i(\theta+h)})-f(e^{i\theta})|^p d\theta \leqslant C(p)|h|^p\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|^p d\theta \quad . \tag{2.57}$$

用 g_z 替换（2.57）中的 f ，我们可得

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|g_z(e^{i(\theta+h)})-g_z(e^{i\theta})|^p d\theta &\lesssim |h|^p\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}g_z(e^{i\theta})\right|^p d\theta\\ &\leqslant |h|^p\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(e^{i\theta}z)\right|^p d\theta.\end{aligned}$$

然后在两侧进行积分及利用 μ_a 的旋转不变性，得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_D |g(e^{ih}z)-g(z)|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_D\int_0^{2\pi}|g_z(e^{i(\theta+h)})-g_z(e^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z)\right)^{1/p}\\ &\lesssim \delta\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_D\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(e^{i\theta}z)\right|^p d\mu_a(z)d\theta\right)^{1/p}\\ &= \delta\sum_{j=1}^{n}\left(\int_D\left|\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)\right|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}\\ &\leqslant \delta\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial g}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}.\end{aligned}$$

引理 2.3.14 设 $Q_j \in H(D)$，$j=1, 2, \cdots, n$. 则存在 $P \in H(D)$ 满足

$$\frac{\partial P}{\partial z_j}(z) = Q_j(z),\ j=1,2,\cdots,n \quad . \tag{2.58}$$

当且仅当

$$\frac{\partial Q_j}{\partial z_i}(z) = \frac{\partial Q_i}{\partial z_j}(z),\ i,\ j=1,2,\cdots,n \quad . \tag{2.59}$$

当（2.59）成立，其解的全体为

$$P(z) = \int_0^{z_1} Q_1(\zeta_1, z_2, \cdots, z_n)\,d\zeta_1 + \int_0^{z_2} Q_2(0,\ \zeta_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n)\,d\zeta_2$$

$$+ \cdots + \int_0^{z_n} Q_n(0,\ \cdots,\ 0,\ \zeta_n)\,d\zeta_n + C, \tag{2.60}$$

其中 C 为任意常数．

证明：我们仅需证明充分性．也就是，对任给定 $Q_j \in H(D)$ 满足（2.59），则（2.60）中给出的 P 为方程（2.58）的解．验证是直接的．

定理 2.3.15 设 $0<p<\infty$，$m\in \mathrm{N}\cup\{0\}$ 和 $k\in \mathrm{N}$. 若 $f\in \mathrm{A}_\mu^{\mathrm{k}}$，则

$$E_k(f,\ A_\mu) \lesssim \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{k^m} \cdot \omega\left(\frac{1}{k},\ D^\beta f,\ A_\mu\right).$$

证明：令 m 和 k 为两非负整数而且 $k\geqslant m+1$. 定理的证明只需构造具有下面性质线性算子 $P_{m,k}$ 就够了：对任意 $f\in H(D)$，$P_{m,k}[f](z)$ 为次数至多 $k-1$ 的多项式且满足：对任意 i，$j=1, 2, \cdots, n$，有

$$\frac{\partial}{\partial z_i} P_{m,k}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right](z) = \frac{\partial}{\partial z_j} P_{m,k}\left[\frac{\partial f}{\partial z_i}\right](z); \tag{2.61}$$

进一步，若对任 $|\beta|\leqslant \mathrm{k}$，$D^\beta f\in A_\mu$，则

$$\| P_{m,k}[f] - f \|_{A_\mu} \lesssim \sum_{|\beta|=m} \frac{1}{k^m}\omega\left(\frac{1}{k},\ D^\beta f,\ A_\mu\right) \quad . \tag{2.62}$$

为了构造 $P_{m,k}$，我们对 m 进行归纳．当 $m=0$ 时，令 $P_{0,k}[f]=P_k[f]$. 这种情况下，所需性质可由定理 2.2.3 推出．现在假设对 $m=l\geqslant 0$，性质成立．

对 $m=l+1$ 和 $D^\beta f\in A_\mu$，$|\beta|\leqslant l+1$. 对 $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$（$j=1, 2, \cdots, n$）利用归纳假设，则对任 $k\geqslant m+1=l+2$，可得

$$\left\| P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right] - \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_{A_\mu} \leqslant \sum_{|\beta|=l} \frac{1}{(k-1)^l} \cdot \omega\left(\frac{1}{k-1},\ \frac{\partial^{|\beta|+1}}{\partial z^\beta \partial z_j} f,\ A_\mu\right) \tag{2.63}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z_i}P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right]=\frac{\partial}{\partial z_j}P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_i}\right],\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

由引理 2.3.14，我们引入算子

$T(Q_1,\cdots,Q_n)(z)=$

$$\int_0^{z_1}Q_1(\zeta_1,z_2,\cdots,z_n)d\zeta_1+\int_0^{z_2}Q_2(0,\zeta_2,z_3,\cdots,z_n)d\zeta_2+\cdots+$$

$$\int_0^{z_n}Q_n(0,\cdots,0,\zeta_n)d\zeta_n.$$

若令

$$P^*_{l+1,k}[f](z)=T\left(P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_1}\right],\ \cdots,\ P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_n}\right]\right)(z),$$

则 $P^*_{l+1,k}[f](z)$ 为次数至多 $k-1$ 的多项式．由引理 2.3.14 知

$$\frac{\partial}{\partial z_j}P^*_{l+1,k}[f](z)=P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right](z).$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial z_j}P^*_{l+1,k}\left[\frac{\partial f}{\partial z_i}\right](z)=P_{l,k-1}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\right](z)=\frac{\partial}{\partial z_i}P^*_{l+1,k}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right](z).$$

另一方面，由不等式（2.63）和引理 2.3.2，我们可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial z_j}P^*_{l+1,k}[f]-\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}&=\left\|P_{l,k-1}\left[\frac{\partial f}{\partial z_j}\right]-\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}\\&\lesssim\sum_{|\beta|=l}\frac{1}{(k-1)^l}\cdot\omega\left(\frac{1}{k-1},\ \frac{\partial^{|\beta|+1}}{\partial z^\beta\partial z_j}f,\ A_\mu\right)\\&\lesssim\sum_{|\beta|=l}\frac{1}{k^l}\cdot\omega\left(\frac{1}{k},\ \frac{\partial^{|\beta|+1}}{\partial z^\beta\partial z_j}f,\ A_\mu\right).\end{aligned}$$

因此从引理 2.3.13 知

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{1}{k},P^*_{l+1,k}[f]-f,\ A_\mu\right)&\lesssim\sum_{j=1}^n\frac{1}{k}\left\|\frac{\partial}{\partial z_j}P^*_{l+1,k}[f]-\frac{\partial f}{\partial z_j}\right\|_{A_\mu}\qquad(2.64)\\&\lesssim\sum_{|\beta|=l+1}\frac{1}{k^{l+1}}\cdot\omega\left(\frac{1}{k},\ D^\beta f,\ A_\mu\right).\end{aligned}$$

结合（2.54）类似可得到

$$\|P_{0,k}[f]-f\|_{A_\mu}\lesssim\omega(\frac{1}{k},f,A_\mu).$$

现在用 $P^{*}_{l+1,k}[f]-f$ 来替换 f，使用不等式(2.64)得到

$$
\begin{aligned}
&\| P_{0,k}[P^{*}_{l+1,k}[f]-f]-(P^{*}_{l+1,k}[f]-f)\|_{A_{\mu}} \\
\lesssim\ &\omega\left(\frac{1}{k}P^{*}_{l+1,k}[f]-f,A_{\mu}\right) \\
\lesssim\ &\sum_{|\beta|=l+1}\frac{1}{k^{l+1}}\cdot\omega\left(\frac{1}{k},D^{\beta}f,A_{\mu}\right).
\end{aligned}
$$

由上述不等式，我们可定义

$$P_{l+1,k}[f](z)=P^{*}_{l+1,k}[f](z)+P_{0,k}[f](z)-P_{0,k}[P^{*}_{l+1,k}[f]](z),$$

所以先前不等式(2.62)成立．显然，$P_{l+1,k}[f](z)$ 为次数至多 $k-1$ 的多项式且满足(2.61)．由引理2.3.2，采用引理2.3.10的类似证明就可得到所需结果．

§2.4　多圆柱上全纯空间

对于多复变多圆柱上的全纯函数空间的 Jackson 逼近定理，也开始研究．其方法与单位球上较为类似，可参考文献[43，44]等，本文不再做介绍．

第三章　Bernstein 定理

反过来，作为 Jackson 定理的逆定理，如何利用多项式逼近的速度来刻画函数的光滑性？Bernstein 在 1912 年得到了下面重要的结果.

Bernstein 定理：若对某 $0<\alpha<1$，有 $E_k(f)\leqslant C(r)k^{-r-\alpha}$，$k=1$，2，…则

$$f^{(r)}\in \mathrm{Lip}\alpha,$$

其中 Lipα 表示 Lipschitz$-\alpha$ 函数类.

本章首先给出 Q_μ 等全纯函数空间中 Bernstein 不等式，并以此为重要工具，建立了相应空间中的 Bernstein 定理. 最后得到多个空间中特殊函数类的逼近等价刻画.

§3.1　单位圆盘上的 Q_p 空间

§3.1.1　Bernstein 不等式

Bernstein 不等式作为逼近的重要工具，在研究逼近的逆定理中起着至关重要作用. 其最早由 Bernstein 在研究连续函数空间时得出，后在很多其他空间得到推广. 本节我们将 Bernstein 不等式推广到单位圆盘 U 上的 Q_p 空间中.

首先需要一个引理.

引理 3.1.1 [45,46]设 $\Phi_k(\theta)$ 为任意实系数的至多 k 次三角多项式. 则

$$\Phi'_k(\theta)=\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{2k}\Phi_k(\theta+t_j)\frac{(-1)^{j+1}}{(\sin\frac{1}{2}t_j)^2},\tag{3.1}$$

其中
$$t_j := \frac{(2j-1)\ \pi}{2k}.$$

特别地，上面恒等式中取 $\Phi_k(\theta) = \frac{1}{k}\sin k\theta, \theta = 0$，就得到很有用的式子
$$1 = \frac{1}{4k^2}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{(\sin\frac{1}{2}t_j)^2}. \tag{3.2}$$

我们可得到单位圆盘 Q_p 空间上的下面版本的 Bernstein 不等式：

定理 3.1.2 设 $P_k(z)$ 为 U 上关于 z 的次数至多为 k 的任一多项式．则
$$\| RP_k(z) \|_{Q_p} \leqslant k \| P_k(z) \|_{Q_p} \quad . \tag{3.3}$$

证明：回忆第二章等式（2.27）知：对 $\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$，有
$$\| RP_k(z) \|_{Q_p}^2 = \sup_{w\in U}\int_U |(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2 g^p(z, w)dm(z) \quad . \tag{3.4}$$

以及等式（2.25）知
$$(Rf)(ze^{i\theta}) = -i\frac{\partial}{\partial\theta}(f(ze^{i\theta})),\ f \in H(U).$$

从而可得
$$|(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2 = \left|\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(P_k(ze^{i\theta}))\right)\right|^2 = \left|\left(\frac{\partial}{\partial\theta}((P_k(ze^{i\theta})'))\right)\right|^2. \tag{3.5}$$

记
$$Q_{k,z}(\theta) = T_{k,z}(\theta) + iS_{k,z}(\theta) := (P_k(ze^{i\theta}))' \quad . \tag{3.6}$$

则 $Q_{k,z}(\theta)$ 为次数至多为 k 的三角多项式．这意味着 $T_{k,z}(\theta)$ 和 $S_{k,z}(\theta)$ 都为实系数的次数至多为 k 的三角多项式．

因此，由（3.5）和(3.6)，得
$$\begin{aligned}|(RP_k(ze^{i\theta}))'|^2 &= |T'_{k,z}(\theta) + iS'_{k,z}(\theta)|^2\\ &= |T'_{k,z}(\theta)|^2 + |S'_{k,z}(\theta)|^2 \quad .\end{aligned} \tag{3.7}$$

结合（3.4）和(3.7)，我们可得
$$\| RP_k(z) \|_{Q_p}^2 \leqslant \sup_{w\in U}\int_U (|T'_{k,z}(\theta)|^2 + |S'_{k,z}(\theta)|^2 g^p(z,w)dm(z). \tag{3.8}$$

由引理 3.1.1 可知
$$\int_U |T'_{k,z}(\theta)|^2 g^p(z, w)dm(z)$$

$$= \int_U \left| \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} T_{k,z}(\theta + t_j) \frac{(-1)^{j+1}}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \right|^2 g^p(z,w) dm(z), \tag{3.9}$$

其中 $t_j := \dfrac{(2j-1)\pi}{2k}$.

现在来估计（3.9）的右端．利用 Minkowski 不等式（参见引理 2.2.5），具体地取 $p=2$，

$$f(x,y) = T_{k,z}(\theta + t_j) \frac{(-1)^{j+1}}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2},$$

$d\mu_1(x) = g^p(z, w) dm(z)$ 和 $d\mu_2(y)$ 为计数测度．所以，

$$\sup_{w \in U} \int_U | T'_{k,z}(\theta) |^2 g^p(z,w) dm(z)$$

$$\leqslant \sup_{w \in U} \left\{ \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} \left(\int_U \left| T_{k,z}(\theta + t_j) \frac{(-1)^{j+1}}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \right|^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= \sup_{w \in U} \left\{ \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \left(\int_U | T_{k,z}(\theta + t_j) |^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$\leqslant \sup_{w \in U} \left\{ \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \left(\int_U | P'_k(ze^{i(\theta+t_j)}) |^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2. \tag{3.10}$$

所以由（3.9），（3.10）和引理 3.1.1 中（3.2），可得

$$\sup_{w \in U} \int_U | T'_{k,z}(\theta) |^2 g^p(z,w) dm(z)$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \left(\sup_{w \in U} \int_U | P'_k(ze^{i(\theta+t_j)}) |^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{1}{4k} \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{(\sin \frac{1}{2} t_j)^2} \left(\sup_{w \in U} \int_U | P'_k(z) |^2 g^p(z,w) dm(z) \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= k^2 \sup_{w \in U} \int_U | P'_k(z) |^2 g^p(z,w) dm(z). \tag{3.11}$$

同理，也可得

$$\sup_{w\in U}\int_U |S'_{k,z}(\theta)|^2 g^p(z,w)dm(z) \leqslant k^2 \sup_{w\in U}\int_U |P'_k(z)|^2 g^p(z,w)dm(z). \tag{3.12}$$

由（3.8），（3.11）和（3.12），最终得到

$$\begin{aligned}\|RP_k(z)\|^2_{Q_p} &\leqslant k^2 \sup_{w\in U}\int_U |P'_k(z)|^2 g^p(z,w)dm(z)\\ &\leqslant k^2 \sup_{w\in U}\int_U |P'_k(z)|^2 g^p(z,w)dm(z)\\ &\leqslant k^2 \|P_k(z)\|^2_{Q_p}.\end{aligned}$$

定理得证.

§3.1.2　最佳逼近存在性

引理 3.1.3　设 $n\in \mathrm{N}$，$M>0$. 则

$$A := \{y = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j : a_j \in \mathrm{R},\ \|y\|_{Q_p} \leqslant M\}$$

是 Q_p 空间的列紧子集．即，对任意序列 $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}\subset A$，存在一子列以 Q_p 的半模收敛于 A 中一多项式.

证明：用 a_{mj} 表示多项式 y_m 的系数．我们断言存在一常数 $M_1>0$ 满足

$$|a_{mj}|\leqslant M_1,\ \forall m,\ j.$$

这样，就存在一个子序列 y_{m_k} 满足对每个 j，

$$a_{m_k j}\to a_j,\ 当\ k\to\infty.$$

所以，依照 Q_p 的半模，$\{y_{m_k}\}$ 收敛于 $y=\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ 且

$$\|y\|_{Q_p}\leqslant \liminf_{k\to\infty}\|y_{m_k}\|_{Q_p}\leqslant M.$$

假设 M_1 不存在，若有必要可取子序列，我们可假定序列

$\{y_m = \sum_{j=0}^{n} a_{mj} z^j\}_{m=1}^{\infty}$ 满足

$$(\mathrm{i})\ \lim_{m\to\infty}\max_{j=0,1,\cdots,n}|a_{mj}| = \infty,$$

$$(\mathrm{ii})\ \max_{j=1,\cdots,n}|a_{mj}| = |a_{m0}|\neq 0.$$

记

$$z_m = \frac{y_m}{a_{m0}}.$$

则

$$\| z_m \|_{Q_p} \leqslant \frac{M}{|a_{m0}|} \to 0,$$

且 z_m 具有形式：

$$z_m = 1 + b_{m1} z + \cdots + b_{mn} z^n,$$

其中 $b_{mj} \leqslant 1$. 因为 b_{mj} 有界，必要时取子序列我们可假定

$$\lim_{m \to \infty} b_{m_j} = b_j, \ j = 1, \ \cdots, \ n.$$

所以，

$$1 + b_{m1} z + \cdots + b_{mn} z^n = 0.$$

因为 $\{z^i\}_{i=0}^n$ 是线性无关的，所以矛盾．故引理得证．

定理 3.1.4 设 $f \in Q_p$. 则存在一函数 $g_0 \in A$ 且满足

$$\| f - g_0 \|_{Q_p} = \inf_{g \in A} \| f - g \|_{Q_p}.$$

证明：取 $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A$ 且满足

$$\| f - y_m \|_{Q_p} \to \inf_{g \in A} \| f - g \|_{Q_p}.$$

因为

$$\| y_m \|_{Q_p} \leqslant \| f \|_{Q_p} + \| f - y_m \|_{Q_p} \leqslant M_2,$$

由引理 3.1.3 知，可找到一子列 $\{y_{m_j}\}$ 和一多项式 $g_0 \in A$ 满足

$$\| y_{m_j} - g_0 \|_{Q_p} \to 0.$$

因此，

$$\| f - y_{m_j} \|_{Q_p} \to \| f - g_0 \|_{Q_p},$$

所以

$$\| f - g_0 \|_{Q_p} = \inf_{g \in A} \| f - g \|_{Q_p}.$$

§3.1.3 Bernstein 逆定理

借助于 Bernstein 不等式，我们可以得到单位圆盘 Q_p 空间上的 Bernstein 逆定理．

定理 3.1.5 对任意 $f \in Q_p$，$h > 0$，和 $r \in \mathrm{N}$，有

$$\omega_r(h, f, Q_p) \leqslant C(r) h^r \sum_{0 \leqslant k \leqslant h^{-1}} (k+1)^{r-1} E_k(f, Q_p) \quad . \tag{3.13}$$

证明：由定理 3.1.4 知，对任意 $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$，存在 P_k 作为 $f \in Q_p$ 的 k

阶最佳逼近多项式，即，

$$\| f-P_k \|_{Q_p} = E_k(f,Q_p).$$

（ⅰ）若 $h>1$，我们仅须证明

$$\omega_r(h,\ f,\ Q_p) \leqslant C(r)h^r E_0(f,\ Q_p).$$

因为 P_0 为常数，有

$$\omega_r(h,\ f,\ Q_p) = \omega_r(h,\ f-P_0,Q_p).$$

而由光滑模定义，我们有

$$\begin{aligned}\omega_r(h,\ f-P_0,Q_p) &= \sup_{0<t\leqslant h}\left\| \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}(f-P_0)(e^{ikt}z)\right\|_{Q_p}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\|(f-P_0)(e^{ikt}z)\|_{Q_p}\\ &\leqslant 2^r\|f-P_0\|_{Q_p}\\ &\leqslant 2^r h^r E_0(f,Q_p)\end{aligned}$$

（ⅱ）若 $0<h\leqslant 1$，由引理 2.1.9（$s=0$）知

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^r f(z)\|_{Q_p} &\leqslant \|\Delta_h^r P_{2^j}(z)\|_{Q_p} + 2^r E_{2^j}(f,Q_p)\\ &\leqslant h^r\|R^r P_{2^j}(z)\|_{Q_p} + 2^r E_{2^j}(f,Q_p)\quad .\end{aligned}\tag{3.14}$$

我们仅需估计 $\|R^r P_{2^j}(z)\|_{Q_p}$.

为简化，记 $\phi(k)=E_k(f,\ Q_p)$．则易知：$\phi(k)$ 为单调递减的而且

$$\|P_1(z)-P_0(z)\|_{Q_p} \leqslant 2\phi(0),\tag{3.15}$$

$$\|P_{2^k}(z)-P_{2^{k-1}}(z)\|_{Q_p} \leqslant 2\phi(2^{k-1}),k\in \mathrm{N}\quad .\tag{3.16}$$

对 $r\geqslant 1$，t^{r-1} 在 R^+ 上单调递增．因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j}(2^{k-1})^r\phi(2^{k-1}) &\leqslant \sum_{k=1}^{j}(4\cdot 2^{k-2})^{r-1}\phi(2^{k-1})\cdot 2^{k-1}\\ &\leqslant 2\cdot 4^{r-1}\sum_{k=1}^{j}(2^{k-2})^{r-1}\phi(2^{k-1})(2^{k-1}-2^{k-2})\\ &\leqslant 2\cdot 4^{r-1}\sum_{k=1}^{j}\int_{2^{k-2}}^{2^{k-1}} t^{r-1}\phi(t)dt\\ &\leqslant 2\cdot 4^{r-1}\int_{\frac{1}{2}}^{2^{j-1}} t^{r-1}\phi(t)dt\\ &\leqslant 2\cdot 4^{r-1}\sum_{k=0}^{2^{j-1}}\int_{k}^{k+1} t^{r-1}\phi(t)dt\quad .\end{aligned}\tag{3.17}$$

因为

$$t^{r-1}\varnothing(t)\leqslant(k+1)^{r-1}\varnothing(k),\forall t\in[k,k+1],$$

（3. 17）可进一步估计为

$$\sum_{k=1}^{j}(2^{k-1})^{r}\varnothing(2^{k-1})\leqslant C(r)\sum_{k=0}^{2^{j-1}}(k+1)^{r-1}\varnothing(k)\quad . \tag{3. 18}$$

由定理 3. 1. 2，即 Bernstein 不等式及（3. 15），（3. 16）和（3. 18），我们可得

$$\begin{aligned}
&\| R^{r}P_{2^{j}}(z)\|_{Q_p}\\
&\leqslant \| R^{r}P_{1}(z)-R^{r}P_{0}(z)\|_{Q_p}+\sum_{k=1}^{j}\| R^{r}P_{2^{k}}(z)-R^{r}P_{2^{k-1}}(z)\|_{Q_p}\\
&\leqslant C^{r}(2\varnothing(0)+2\sum_{k=1}^{j}(2^{k-1})^{r}\varnothing(2^{k-1}))\\
&\leqslant C(r)\sum_{0\leqslant k\leqslant 2^{j-1}}(k+1)^{r-1}\varnothing(k).
\end{aligned}\tag{3. 19}$$

若 $j=0$ 或 1，有

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^{j}}(k+1)^{r-1}\geqslant 2^{jr}$$. 当 $j\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^{j}}(k+1)^{r-1}&=(2^{j}+1)^{r-1}+\sum_{l=1}^{j}\sum_{k=2^{l-1}}^{2^{l}-1}(k+1)^{r-1}\\
&>\sum_{l=1}^{j}2^{l-1}\cdot(2^{l-1})^{r-1}\\
&=\sum_{l=1}^{j}(2^{l-1})^{r}=\frac{2^{jr}-1}{2^{r}-1}\\
&>\frac{1}{2(2^{r}-1)}\cdot 2^{jr}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^{j}}(k+1)^{r-1}\varnothing(k)\geqslant\varnothing(2^{j})\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^{j}}(k+1)^{r-1}\\
&\geqslant\min\left\{\frac{1}{2(2^{r}-1)},1\right\}2^{jr}\varnothing(2^{j}).
\end{aligned}\tag{3. 20}$$

由（3. 14），可得

$$\|\Delta_{h}^{r}f(z)\|_{Q_p}\leqslant C(r)(h^{r}+2^{-jr})\sum_{0\leqslant k\leqslant 2^{j}}(k+1)^{r-1}\varnothing(k)\quad . \tag{3. 21}$$

取 $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 满足 $2^{j}\leqslant h^{-1}<2^{j+1}$，显然

$$2^{-(j+1)r}<h^r\leqslant 2^{-jr}<2^r h^r. \tag{3.22}$$

最后由(3.21)和(3.22)，我们得到

$$\begin{aligned}\omega_r(h, f, Q_p) &= \sup_{0<t<h}\|\Delta_t^r f(z)\|_{Q_p}\\ &\leqslant C(r)\sup_{0<t<h}\{(t^r+2^{-jr})\sum_{0\leqslant k\leqslant 2^j}(k+1)^{r-1}\varnothing(k)\}\\ &\leqslant C(r)(h^r+2^{-jr})\sum_{0\leqslant k\leqslant 2^j}(k+1)^{r-1}\varnothing(k)\\ &\leqslant C(r)h^r\sum_{0\leqslant k\leqslant h^{-1}}(k+1)^{r-1}E_k(f, Q_p).\end{aligned}$$

定理得证.

§3.1.4 正逆定理的应用

作为 Jackson 定理和 Bernstein 定理，即定理 2.2.3 和定理 3.1.5 的应用，我们可给出单位圆盘 Q_p 空间中的 Lipschitz 子空间和 Zygmund 子空间依照逼近速度的等价刻画.

定义 3.1.6 用 X 表示定义在域 D 上具有半模 $\|\cdot\|_X$ 的函数空间. Lipschitz 型子空间 $Lip_\gamma(D)$, $0<\gamma\leqslant 1$，由所有满足下列条件的全纯函数 $f\in X$ 构成：对任 $h\in \mathrm{R}$,

$$\|\Delta_h f(z)\|_X = \|f(e^{ih}z)-f(z)\|_X\leqslant L|h|^\gamma,$$

这里满足条件的最小常数 $L>0$ 称为 Lipschitz 常数.

易知，对任 $f(z)\in X$ 和 $0<\gamma\leqslant 1$,

$$f\in Lip_\gamma(D)\Longleftrightarrow\omega(|h|, f, X)\leqslant L|h|^\gamma, \forall h\in R \quad . \tag{3.23}$$

定义 3.1.7 用 X 表示定义在域 D 上具有半模 $\|\cdot\|_X$ 的函数空间. Zygmund 型子空间 Z，由所有满足下列条件的全纯函数 $f\in X$ 构成：

$$\omega_2(h, f, X) = O(h).$$

实际上，易知对每个 $f\in \mathrm{Z}$ 都有连续模 $\omega(h, f, \mathrm{X}) = O(h\ln(\frac{1}{h}))$.

关于经典的实连续函数的 Zygmund 空间更多内容，参见[12].

结合 Q_p 空间中的 Jackson 定理(推论 2.2.10)和 Bernstein 定理(定理 3.1.5)，我们可得下面结果.

定理 3.1.8 设 $0<\gamma<1$, $0\leqslant p<\infty$, $f\in Q_p$. 则

$$f \in Lip_\gamma \Longleftrightarrow E_k(f, Q_p) = O(k^{-\gamma}), \forall k \in \mathrm{N} \quad . \tag{3.24}$$

$$f \in Z \Longleftrightarrow E_k(f, Q_p) = O(k^{-1}), \forall k \in \mathrm{N} \quad . \tag{3.25}$$

证明：我们仅需证明（3.24），类似可证（3.25）.

（ⅰ）易知 $E_k(f, Q_p) \leqslant E_{k-1}(f, Q_p)$. 所以必要性可直接由推论 2.2.10 和（3.28）得到.

（ⅱ）证明充分性，不失一般性，假定 $h>0$. 由定理 3.1.5，有

$$\omega(h, f, Q_p) = O(1)h \sum_{1 \leqslant k \leqslant h^{-1}} k^{-\gamma} = O(1)h \int_0^{h^{-1}} x^{-\gamma} dx = O(h^\gamma).$$

由于 $BMOA = Q_1$，作为定理 3.1.5 和定理 3.1.8 的直接推论，我们有

推论 3.1.9 对任意 $f \in BMOA$，$h>0$，$r \in \mathrm{N}$，有

$$\omega_r(h, f, BMOA) \leqslant C(r)h^r \sum_{0 \leqslant k \leqslant h^{-1}} (k+1)^{r-1} E_k(f, BMOA).$$

推论 3.1.10 设 $0<\gamma<1$，$f \in BMOA$. 则

$$f \in Lip_\gamma \Longleftrightarrow E_k(f, BMOA) = O(k^{-\gamma}), \ \forall k \in \mathrm{N};$$

$$f \in Z \Longleftrightarrow E_k(f, BMOA) = O(k^{-1}), \ \forall k \in \mathrm{N}.$$

§3.2 星形圆型域上的 Q_μ 空间

本节中，我们需对星形圆型域 D 上的 Q_μ 空间定义的测度 $\mu_a(z)$ 加以限制，也就是，$\mu_a(z)$ 满足旋转不变性，即满足下列情形之一：对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$，

（ⅰ）$\mu_a(z) = \mu_{ae^{i\theta}}(ze^{i\theta}), p \geqslant 1$；

（ⅱ）$\mu_a(z) = \mu_a(ze^{i\theta}), p > 0$.

§3.2.1 Bernstein 不等式

引理 3.2.1[1,47] 设 $T_k(\theta)$ 为次数 $\leqslant k$ 的三角多项式 . 则对任 $0<p\leqslant\infty$，

$$\int_0^{2\pi} |T'_k(\theta)|^p d\theta \leqslant k^p \int_0^{2\pi} |T_k(\theta)|^p d\theta \quad . \tag{3.26}$$

当 $p=\infty$，可理解为极限情况

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} |T_k{}'(\theta)| \leqslant k \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |T_k(\theta)|.$$

Q_μ 空间中的 Bernstein 逆定理即定理 3.2.8 依赖于下面版本的 Bernstein

不等式．

定理 3.2.2　设 $P_k(z)$ 表示次数至多为 k 的任意多项式．则

$$\| RP_k(z) \|_{Q_\mu} \leqslant kC(n,p) \| P_k(z) \|_{Q_\mu} \quad . \tag{3.27}$$

证明：记 $D_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j}$，其中 $1 \leqslant j \leqslant n$. 则

$$|\nabla f(z)|^2 = \sum_{j=1}^{n} |D_j f(z)|^2.$$

注意到

$$C^{-1}(n, p) \sum_{j=1}^{n} a_j^p \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^p \leqslant C(n, p) \sum_{j=1}^{n} a_j^p, \tag{3.28}$$

其中 $a_j \geqslant 0$，$0 < p < \infty$，常数 $C(n, p)$ 仅依赖于 p 和 n. 我们有

$$|\nabla f(z)|^p = \left(\sum_{j=1}^{n} |D_j f(z)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \simeq \sum_{j=1}^{n} |D_j f(z)|^p \quad . \tag{3.29}$$

由定义，对任 $f \in H(D)$，

$$(Rf)(ze^{i\theta}) = -i \frac{\partial}{\partial \theta}(f(ze^{i\theta})) \quad . \tag{3.30}$$

和

$$(\nabla f)(ze^{i\theta}) = e^{-i\theta} \nabla (f(ze^{i\theta})) \quad . \tag{3.31}$$

(A) 情况：$\mu_a(z) = \mu_{ae^{i\theta}}(ze^{i\theta})$，$p \geqslant 1$.

对任 $\theta \in [0, 2\pi]$，有

$$\begin{aligned} \| RP_k(z) \|_{Q_\mu}^p &= \sup_{a \in \Gamma} \int_D |\nabla (RP_k(z))|^p d\mu_a(z) \\ &= \sup_{ae^{i\theta} \in \Gamma} \int_D |\nabla (RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_{ae^{i\theta}}(ze^{i\theta}) \\ &= \sup_{a \in \Gamma} \int_D |\nabla (RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(z) \quad . \end{aligned} \tag{3.32}$$

由 (3.29)，(3.30) 和 (3.31)，可得

$$\begin{aligned} |\nabla (RP_k(ze^{i\theta}))|^p &= \left| \nabla \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(P_k(ze^{i\theta}) \right) \right|^p \\ &\leqslant C(n,p) \sum_{j=1}^{n} \left| D_j \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(P_k(ze^{i\theta})) \right) \right|^p \\ &= C(n,p) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial \theta}(D_j(P_k(ze^{i\theta}))) \right|^p \quad . \end{aligned} \tag{3.33}$$

记

$$Q_{j,k,z}(\theta)=T_{j,k,z}(\theta)+iS_{j,k,z}(\theta)=D_j(P_k(ze^{i\theta}))).$$

则 $Q_{j,k,z}(\theta)$ 为次数至多为 k 的三角多项式，$T_{j,k,z}(\theta)$ 和 $S_{j,k,z}(\theta)$ 分别为实系数次数至多为 k 的三角多项式.

所以由（3.41），

$$|\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p\leqslant C(n,p)\sum_{j=1}^{n}|T'_{j,k,z}(\theta)+iS'_{j,k,z}(\theta)|^p$$

$$\leqslant C(n,p)\sum_{j=1}^{n}(|T'_{j,k,z}(\theta)|^p+|S'_{j,k,z}(\theta)|^p)\ .\quad(3.34)$$

从（3.32）和（3.34）得

$$\|RP_k(z)\|_{Q_\mu}^p\leqslant C(n,p)\sum_{j=1}^{n}\sup_{a\in\Gamma}\int_D(|T'_{j,k,z}(\theta)|^p+|S'_{j,k,z}(\theta)|^p)d\mu_a(z).\quad(3.35)$$

由引理 3.1.1 和 Minkowski 不等式（$p\geqslant 1$）可得

$$\sup_{a\in\Gamma}\int_D|T'_{j,k,z}(\theta)|^p d\mu_a(z)$$

$$=\sup_{a\in\Gamma}\int_D\left|\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{2k}T_{j,k,z}(\theta+t_j)\frac{(-1)^{j+1}}{\left(\sin\frac{1}{2}t_j\right)^2}\right|^p d\mu_a(z)$$

$$\leqslant\sup_{a\in\Gamma}\left\{\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{\left(\sin\frac{1}{2}t_j\right)^2}\left(\int_D|T_{j,k,z}(\theta+t_j)|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}\right\}^p$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{\left(\sin\frac{1}{2}t_j\right)^2}\left(\sup_{a\in\Gamma}\int_D|D_j(P_k(ze^{i(\theta+t_j)}))|^p d\mu_a(z)\right)^{1/p}\right\}^p$$

$$=\left\{\frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{2k}\frac{1}{\left(\sin\frac{1}{2}t_j\right)^2}\right\}^p\sup_{a\in\Gamma}\int_D|D_j(P_k(z))|^p d\mu_a(z)$$

$$=k^p\sup_{a\in\Gamma}\int_D|D_j(P_k(z))|^p d\mu_a(z),\quad(3.36)$$

其中 $t_j:=\dfrac{(2j-1)\pi}{2k}$.

同理，可得

$$\sup_{a\in\Gamma}\int_D|S'_{j,k,z}(\theta)|^p d\mu_a(z)\leqslant k^p\sup_{a\in\Gamma}\int_D|D_j(P_k(z))|^p d\mu_a(z)\quad.\quad(3.37)$$

由（3.35），（3.36）和（3.37），我们最终得到

$$\begin{aligned}\| RP_k(z) \|_{Q_p}^p &\leqslant 2C(n,p)k^p \sum_{j=1}^n \sup_{a\in\Gamma}\int_D |D_j(P_k(z))|^p d\mu_a(z)\\ &\leqslant C(n,p)k^p \sum_{j=1}^n \sup_{a\in\Gamma}\int_D |\nabla(P_k(z))|^p d\mu_a(z)\\ &= C(n,p)k^p \| P_k(z) \|_{Q_\mu}^p.\end{aligned}$$

（B）情况：$\mu_a(z)=\mu_a(ze^{i\theta})$，$p>0$

对任 $\theta\in[0,2\pi]$，利用测度旋转不变性 $d\mu_a(z)=d\mu_a(ze^{i\theta})$，有

$$\begin{aligned}\| RP_k(z) \|_{Q_\mu}^p &= \sup_{a\in\Gamma}\int_D |\nabla(RP_k(z))|^p d\mu_a(z)\\ &= \sup_{a\in\Gamma}\int_D |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(ze^{i\theta})\\ &= \sup_{a\in\Gamma}\int_D |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(z),\end{aligned}\tag{3.38}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_D |\nabla(RP_k(z))|^p d\mu_a(z)\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_D |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(ze^{i\theta})d\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_D |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(z)d\theta\end{aligned}\tag{3.39}$$

由（3.39）和 Fubini 定理，可得

$$\begin{aligned}\| RP_k(z) \|_{Q_\mu}^p &= \sup_{a\in\Gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_D |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(z)d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\theta d\mu_a(z)\end{aligned}\tag{3.40}$$

由（3.29），（3.30）和（3.31），知

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\theta &= \int_0^{2\pi}\left|\nabla\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}(P_k(ze^{i\theta}))\right)\right|^p d\theta\\ &\lesssim \sum_{j=1}^n\int_0^{2\pi}\left|D_j\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(P_k(ze^{i\theta}))\right)\right|^p d\theta\\ &= \sum_{j=1}^n\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}(D_j(P_k(ze^{i\theta})))\right|^p d\theta\end{aligned}\tag{3.41}$$

令

$$Q_{j,k,z}(\theta)=D_j(P_k(ze^{i\theta})).$$

易知 $Q_{j,k,z}(\theta)$ 为次数至多为 k 的三角多项式．所以由（3.41），引理 3.2.1 和（3.29），

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|\nabla(RP_k(ze^{i\theta}))|^p d\theta &\lesssim \sum_{j=1}^{n}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial\theta}(Q_{j,k,z}(\theta))\right|^p d\theta\\ &\leqslant n^p\sum_{j=1}^{n}\int_0^{2\pi}|Q_{j,k,z}(\theta)|^p d\theta\\ &\lesssim n^p\int_0^{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}|Q_{j,k,z}(\theta)|^2\right)^{p/2}d\theta\\ &= n^p\int_0^{2\pi}|\nabla(P_k(ze^{i\theta}))|^p d\theta\quad .\end{aligned}\tag{3.42}$$

由（3.40），（3.42）和（3.38），最后得到

$$\begin{aligned}\|RP_k(z)\|_{Q_\mu}^p &\lesssim \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D n^p\int_0^{2\pi}|\nabla(P_k(ze^{i\theta}))|^p d\theta d\mu_a(z)\\ &\leqslant n^p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D|\nabla(P_k(ze^{i\theta}))|^p d\mu_a(z)d\theta\\ &= n^p\|P_k(z)\|_{Q_\mu}^p.\end{aligned}$$

定理得证．

我们把 D 限定为单位球 B，因为 Q_p 空间可作为 Q_μ 的特例，则由上面定理易得单位球上 Q_p 中的 Bernstein 不等式．

定理 3.2.3 令 $P_k(z)$ 表示关于 $z\in$ B 次数 $\leqslant k$ 的任多项式．则

$$\|RP_k(z)\|_{Q_p}\leqslant kC(n,p)\|P_k(z)\|_{Q_p}.$$

§3.2.2 最佳逼近存在性

类似于引理 3.1.3 和定理 3.1.4，我们易得下列相似结论．

引理 3.2.4 设 $n\in$ N 及 $M>0$. 若 $F_j(z)$ 为 j 次齐次多项式，$j=1,\cdots,n$，则

$$A:=\{y=\sum_{j=0}^{n}a_jF_j(z):a_j\in \mathrm{R},\ \|y\|_{Q_\mu}\leqslant M\}$$

为 Q_μ 中紧序列子集．即，对任序列 $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}\subset A$，存在一个子序列以 Q_μ 的半模收敛于 A 中一多项式．

定理 3.2.5 $F_j(z)$ 表示为 j 次齐次多项式，$j=1,\cdots,n$，及 $f\in Q_\mu$. 则

存在一函数 $g_0 \in A$ 且满足

$$\| f - g_0 \|_{Q_\mu} = \inf_{g \in A} \| f - g \|_{Q_\mu}.$$

§3.2.3　Bernstein **逆定理**

用 U 表示复平面上单位圆盘，$H^p(U)$ 为 U 上 Hardy 空间 .

引理 3.2.6[15] 若 $g(z) \in H^p(U)$，$0 < p < 1$ 和 $k \in \mathrm{N}$，则

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_{h,\theta}^k g(e^{i\theta})|^p d\theta \leqslant C(p,k) h^{kp} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial \theta^k} (g(e^{i\theta})) \right|^p d\theta, \tag{3.43}$$

其中

$$\Delta_{h,\theta}^k g(e^{i\theta}) = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} g(e^{i(\theta + mh)})$$

和 $C_{p,k}$ 为仅依赖 p，k 的常数 .

引理 3.2.7　对任意 $f(z) \in Q_\mu$，$k \in \mathrm{N}$ 和 $h > 0$，有

$$\| \Delta_h^k f \|_{Q_\mu} \lesssim h^k \| R^k f \|_{Q_\mu} \quad . \tag{3.44}$$

证明：情况 1：$1 \leqslant p < \infty$.

由定义，易知

$$\begin{aligned} \triangle_h^k f(z) &= \int_0^h \cdots \int_0^h \frac{\partial^k}{\partial \theta_1 \cdots \partial \theta_k} f(z e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}) d\theta_1 \cdots d\theta_k \\ &= \int_0^h \cdots \int_0^h i^k (R^k f)(z e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)}) d\theta_1 \cdots d\theta_k \quad . \end{aligned} \tag{3.45}$$

由 (3.45)，Minkowski 不等式，$d\mu_a(z)$ 的旋转不变性及(3.32)，我们有

$$\begin{aligned} &\| \Delta_h^k f(z) \|_{Q_\mu} \\ &= \left(\sup_{a \in \Gamma} \int_D |(\nabla(\Delta_h^k f))(e^{i\theta} z)|^p d\mu_a(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left((\sup_{a \in \Gamma} \int_D (\int_0^h \cdots \int_0^h |\nabla (R^k f)(z e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)})| d\theta_1 \cdots d\theta_k)^p d\mu_a(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \int_0^h \cdots \int_0^h (\sup_{a \in \Gamma} \int_D (|\nabla (R^k f)(z e^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_k)})|)^p d\mu_a(z))^{\frac{1}{p}} d\theta_1 \cdots d\theta_k \\ &= h^k \| R^k f(z) \|_{Q_\mu}. \end{aligned}$$

情况 2：$0 < p < 1$，$\mu_a(z) = \mu_a(z e^{i\theta})$

与证明 (3.40) 过程一样，可得

$$\|\Delta_h^k f(z)\|_{Q_\mu} = (\sup_{a\in\Gamma}\int_D |\nabla(\Delta_h^k f))(e^{i\theta}z)|^p d\mu_a(z))^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} |\nabla(\Delta_h^k f(ze^{i\theta}))|^p d\theta d\mu_a(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^n |D_j(\Delta_h^k f(ze^{i\theta}))|^p d\theta d\mu_a(z)\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.46)$$

注意到

$$D_j(\Delta_h^k f(ze^{i\theta})) = D_j\left(\sum_{m=0}^k (-1)^{k-m}\binom{k}{m} f(ze^{i(\theta+mh)})\right)$$

$$= \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m}\binom{k}{m}(D_j f)(ze^{i(\theta+mh)})\cdot e^{i(\theta+mh)}$$

$$= \Delta_{h,\theta}^k((D_j f)(ze^{i\theta})\cdot e^{i\theta})$$

$$:= \Delta_{h,\theta}^k(g_{z,j}(e^{i\theta})). \quad (3.47)$$

对任意 $z\in D$ 和 $j=1,\cdots,n$，记

$$g_{z,j}(w) = (D_j f)(zw)\cdot w,\ \forall w\in U.$$

因为 $D_j f\in H(D)$，故 $g_{z,j}(w)\in H^p(U)$ 且

$$g_{z,j}(e^{i\theta}) = (D_j f)(ze^{i\theta})\cdot e^{i\theta} = D_j(f(ze^{i\theta})) \quad . \quad (3.48)$$

由引理 3.2.6,(3.47),(3.48)和(3.30)知

$$\int_0^{2\pi} |\Delta_{h,\theta}^k(g_{z,j}(e^{i\theta}))|^p d\theta \lesssim h^{kp}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}(g_{z,j}(e^{i\theta}))\right|^p d\theta$$

$$= h^{kp}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}(D_j(f(ze^{i\theta})))\right|^p d\theta$$

$$= h^{kp}\int_0^{2\pi}\left|D_j\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}(f(ze^{i\theta}))\right|^p d\theta$$

$$= h^{kp}\int_0^{2\pi} |D_j R^k(f(ze^{i\theta}))|^p d\theta \quad . \quad (3.49)$$

最后，由(3.46)—(3.49)我们可得

$$\|\Delta_h^k f(z)\|_{Q_\mu} \lesssim \left(\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D h^{kp}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^n |D_j(R^k(f(ze^{i\theta})))|^p d\theta d\mu_a(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim h^k\left(\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} |\nabla(R^k(f(ze^{i\theta})))|^p d\theta d\mu_a(z)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= h^k\|R^k f(z)\|_{Q_\mu}.$$

证毕.

定理 3.2.8　设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的星形圆型域．则对任意 $f\in Q_\mu$，$h>0$ 和 $r\in\mathbb{N}$，有

$$\omega_r(h, f, Q_\mu)\leqslant C(r,p,n)h^r\sum_{0\leqslant k\leqslant h^{-1}}(k+1)^{r-1}E_k(f, Q_\mu),$$

其中常数 $C(r, p, n)$ 仅依赖于 r，p，n.

证明：与 Q_p 空间 Bernstein 逆定理（即定理 3.1.5）证明完全类似.

§3.2.4　正逆定理的应用

结合 Q_μ 空间中的 Jackson 定理（定理 2.2.3）和 Bernstein 定理（定理 3.2.8），我们容易得到下面结果.

定理 3.2.9　对 $f\in Q_\mu$ 和 $0<\gamma<1$，有

$$f\in Lip_\gamma\Longleftrightarrow E_k(f,Q_\mu)=O(k^{-\gamma}),$$

$$f\in Z\Longleftrightarrow E_k(f,Q_\mu)=O(k^{-1}).$$

§3.3　其他空间

在本节中我们将给出其他某些函数空间中的情况.

§3.3.1　A_μ 空间

本小节中，D 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的星形圆型域．首先我们得到重要的 Bernstein 不等式.

定理 3.3.1　设 $P_k(z)$ 为关于 $z\in D$ 的次数至多为 k 的任多项式．则

$$\|RP_k(z)\|_{A_\mu}\leqslant k\|P_k(z)\|_{A_\mu}\quad. \tag{3.50}$$

证明：我们知

$$\|RP_k(z)\|^p_{A_\mu}=\sup_{a\in\Gamma}\int_D|RP_k(z)|^p d\mu_a(z)$$

$$=\sup_{a\in\Gamma}\int_D|RP_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z).$$

类似（3.40），易得

$$\|RP_k(z)\|^p_{A_\mu}\leqslant\sup_{a\in\Gamma}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|RP_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|RP_k(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z)\quad. \tag{3.51}$$

记 $g_z(\theta)=P_k(ze^{i\theta})$．我们注意到 $g_z(\theta)$ 为次数至多为 k 的三角多项式，及对 $f(z)\in H(D)$，

$$iRf(ze^{i\theta})=\frac{\partial}{\partial\theta}(f(ze^{i\theta}))\quad. \tag{3.52}$$

所以由（3.51），（3.52）和引理 3.2.1，有

$$\begin{aligned}\|RP_k(z)\|_{A_\mu}^p&\leqslant\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|g_z{}'(\theta)|^p d\theta d\mu_a(z)\\&\leqslant\frac{k^p}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|g_z(\theta)|^p d\theta d\mu_a(z)\\&\leqslant\frac{k^p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D|P_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z)d\theta\\&=k^p\|P_k(z)\|_{A_\mu}^p.\end{aligned}$$

定理得证．

引理 3.3.2 设 $f(z)\in A_\mu$，$r\in\mathrm{N}$. 则

$$\|\Delta_h^r f(z)\|_{A_\mu}\lesssim h^r\|R^r f(z)\|_{A_\mu}\quad. \tag{3.53}$$

证明：当 $p\geqslant1$ 时，我们可得

$$\begin{aligned}\Delta_h^r f(z)&=\int_0^h\cdots\int_0^h\frac{\partial^r}{\partial\theta_1\cdots\partial\theta_r}(f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}))d\theta_1\cdots d\theta_r\\&=\int_0^h\cdots\int_0^h i^rR^rf(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})d\theta_1\cdots d\theta_r.\end{aligned}$$

所以由 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^r f(z)\|_{A_\mu}&=\sup_{a\in\Gamma}\left(\int_D\left|\int_0^h\cdots\int_0^h i^rR^rf(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})d\theta_1\cdots d\theta_r\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\int_0^h\cdots\int_0^h\sup_{a\in\Gamma}\int_D|R^rf(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})|^p\Big)^{\frac{1}{p}}d\theta_1\cdots d\theta_r\\&=h^r\|R^rf(z)\|_{A_\mu}.\end{aligned}$$

当 $0<p<1$ 时．同理于（3.51）和（3.40）证明，得到

$$\|\triangle_h^r f(z)\|_{A_\mu}^p\leqslant\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|\triangle_h^r f(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z)\quad. \tag{3.54}$$

令 $g_z(e^{i\theta})=f(ze^{i\theta})$．易知

$$\Delta_h^r f(ze^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k} f(ze^{i(\theta+kh)})$$
$$= \Delta_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta}).$$

利用（4. 24），引理 3. 2. 6 和（3. 52），得

$$\|\triangle_h^r f(z)\|_{A_\mu}^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|\triangle_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z)$$
$$\lesssim \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D h^{rp}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^r}{\partial\theta^r}(g_z(e^{i\theta}))\right|^p d\theta d\mu_a(z)$$
$$= h^{rp}\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi}|R^r f(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z)$$
$$\leqslant h^{rp}\|R^r f(z)\|_{A_\mu}^p.$$

证毕.

类似于定理 3. 1. 5 的证明，我们易得 A_μ 空间的 Bernstein 定理.

定理 3. 3. 3　设 D 为星形圆型域. 对任意 $f\in A_\mu$，$h>0$ 和 $r\in \mathrm{N}$，则

$$\omega_r(h, f, A_\mu) \leqslant C(r, p, n)h^r \sum_{0\leqslant k\leqslant h^{-1}}(k+1)^{r-1}E_k(f, A_\mu), \quad (3.55)$$

其中常数 $C(r, p, n)$ 仅依赖于 r，p，n.

借助于定理 2. 3. 3 和定理 3. 3. 3，与 Q_μ 空间证明相同，我们可得 A_μ 空间相应结果.

定理 3. 3. 4　设 $f\in A_\mu$. 则对 $0<\gamma<1$，有

$$f\in \mathrm{Lip}_\gamma \Longleftrightarrow E_k(f, A_\mu) = O(k^{-\gamma}),$$
$$f\in Z \Longleftrightarrow E_k(f, A_\mu) = O(k^{-1}).$$

§3. 3. 2　Bergman 型空间

一个正的连续函数 φ 定义在 $[0,1)$ 上被认为是正规的是当存在常数 $0<a<b$ 和 $0\leqslant r_0<1$ 满足

(i) $(1-r)^{-a}\varphi(r)$ 在 $[r_0, 1)$ 上是不增的且 $\lim_{r\to 1^-}(1-r)^{-a}\varphi(r)=0$；

(ii) $(1-r)^{-b}\varphi(r)$ 在 $[r_0, 1)$ 上是不减的且 $\lim_{r\to 1^-}(1-r)^{-b}\varphi(r)=\infty$.

以后，总假定 φ 为正规函数. 记星形圆型域 D 的拓扑边界为 S，其上正规化 Lebesgue 测度记为 $d\sigma$.

Bergman 型空间 $H_{p,q,\varphi}=H_{p,q,\varphi}(D)$ 由所有满足下列条件的全纯函数 f

构成：

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}}^{p}:=\int_0^1(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,f)dr<+\infty,$$

其中 $0<p$，$q\leqslant+\infty$ 和

$$M_q(r,f)=\left(\int_S|f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

通常，情况 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 为极限意义下的情形.

我们同样在 Bergman 型空间 $H_{p,q,\varphi}$ 建立 Bernstein 不等式.

定理 3.3.5 设 $P_k(z)$ 为关于 $z\in D$ 次数 $\leqslant k$ 的任一多项式. 则

$$\|RP_k(z)\|_{H_{p,q,\varphi}}\leqslant k\|P_k(z)\|_{H_{p,q,\varphi}}\quad. \tag{3.56}$$

证明：令 $z=r\zeta$，其中 $\zeta\in S$，$P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})=P_k(r\zeta e^{i\theta})$，易知其为关于 θ 次数至多为 k 的三角多项式.

所以由引理 3.2.1，可得，对任意 $p>0$，

$$\begin{aligned}\int_S|RP_k(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_S|RP_k(r\zeta e^{i\theta})|^p d\theta d\sigma(\zeta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_S\int_0^{2\pi}\left|i\frac{\partial}{\partial\theta}(P_{k,r\zeta}(e^{i\theta}))\right|^p d\sigma(\zeta)d\theta\\&\leqslant k^p\frac{1}{2\pi}\int_S\int_0^{2\pi}|P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})|^p d\theta d\sigma(\zeta)\\&=k^p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_S|P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})|^p d\sigma(\zeta)d\theta\\&=k^p\int_S|P_k(r,\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\quad.\end{aligned}\tag{3.57}$$

最后由函数空间定义和（3.57），我们可以直接得到（3.56）.

与 A_μ 空间证明相同，我们易得相应的结果.

引理 3.3.6 设 $f(z)\in H_{p,q,\varphi}(D)$，$r\in\mathrm{N}$，$h>0$. 则

$$\|\Delta_h^r f(z)\|_{H_{p,q,\varphi}}\lesssim h^r\|R^r f(z)\|_{H_{p,q,\varphi}}.$$

定理 3.3.7 设 D 为星形圆型域. 对任意 $f\in H_{p,q,\varphi}$，$h>0$，$r\in\mathrm{N}$，则

$$\omega_r(h,f,H_{p,q,\varphi})\leqslant Ch^r\sum_{0\leqslant k\leqslant h^{-1}}(k+1)^{r-1}E_k(f,H_{p,q,\varphi}),\tag{3.58}$$

其中常数 C 独立于 f，k.

本小节以下部分，将限定 D 为有界对称域 Ω. Bergman 型空间 $H_{p,q,\alpha}=$

$H_{p,q,\alpha}(\Omega)$（参见[26，48]）由所有满足下列条件的全纯函数 f 构成：

$$\|f\|^p_{H_{p,q,\alpha}} := \int_0^1 (1-r)^{p\alpha-1} M_q^p(r, f) dr < +\infty,$$

其中 $0<p$，$q\leqslant+\infty$，$\alpha>0$ 且

$$M_q(r, f) = \left(\int_S |f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

定理 3.3.8[42]　设 $f(z) \in H_{p,q,\alpha}(\Omega)$．则

$$E_k(f, H_{p,q,\alpha}(\Omega)) \lesssim \omega(1/k, f, H_{p,q,\alpha}(\Omega)).$$

定理 3.3.9　设 $f(z) \in H_{p,q,\varphi}(\Omega)$．则

$$E_k(f, H_{p,q,\varphi}(\Omega)) \lesssim \omega(1/k, f, H_{p,q,\varphi}(\Omega)).$$

证明：参见［42］中定理 3.4，现取特殊情况：$\varphi(r) = (1-r)^\alpha$，其中 $\alpha > 0$. 其证明对一般的正规函数 φ 也适用．

最后由定理 3.3.7 和定理 3.3.9，我们易得下面结果．

定理 3.3.10　设 $f(z) \in H_{p,q,\varphi}(\Omega)$．则对 $0<\gamma<1$，

$$f \in Lip_\gamma \Longleftrightarrow E_k(f, H_{p,q,\varphi}) = O(k^{-\gamma}),$$

$$f \in Z \Longleftrightarrow E_k(f, H_{p,q,\varphi}) = O(k^{-1}).$$

§3.3.3　D 代数

本小节我们假定 D 为 C^n 中有界的星形圆型域．D 代数 $A(D)$ 表示所有的 D 上全纯且连续到 D 的边界的函数全体，其模取为

$$\|f\|_{A(D)} = \max_{z\in\overline{D}} |f(z)|.$$

引理 3.3.11[1]　设 $P_k(\theta)$ 为关于 $\theta \in [0, 2\pi]$ 次数至多为 k 的任三角多项式和

$$\|P_k(\theta)\|_{\max} = \max_{\theta\in[0,2\pi]} |P_k(\theta)|,$$

则

$$\|P'(\theta)\|_{\max} \leqslant k \|P_k(\theta)\|_{\max}. \tag{3.59}$$

引理 3.3.12　设 $P_k(z)$ 为关于 $z\in D$ 次数至多为 k 的任多项式．则

$$\|RP_k(z)\|_{A(D)} \leqslant k \|P_k(z)\|_{A(D)}. \tag{3.60}$$

证明：令 $z=r\zeta$，其中 $|\zeta|=1$. 我们先来证明

$$\max_{z\in\overline{D}} |P_k(z)| = \max_r \left(\max_{|\zeta|=1} \left(\max_\theta |P_k(r\zeta e^{i\theta})|\right)\right). \tag{3.61}$$

易知

$$\max_{z\in\overline{D}}|P_k(z)|\geqslant \max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|P_k(r\zeta e^{i\theta})|)).$$

所以我们只需证明

$$\max_{z\in\overline{D}}|P_k(z)|\leqslant \max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|P_k(r\zeta e^{i\theta})|)).$$

因为 $|P_k(z)|$ 连续，存在 $z_0\in\overline{D}$ 满足 $|P_k(z_0)|=\max\limits_{z\in A(D)}|P_k(z)|$．同样存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$ 满足：对任固定的 r，ζ，有 $|P_k(r\zeta e^{i\theta_0})|=\max\limits_\theta|P_k(r\zeta e^{i\theta})|$．令 $\zeta_0=\dfrac{z_0}{|z_0|}$，$r_0=|z_0|$．所以 $z_0=r_0\zeta_0=r_0(e^{-i\theta_0}\zeta_0)e^{i\theta_0}$．易知

$$\begin{aligned}\max_{z\in\overline{D}}|P_k(z)|&=|P_k(z_0)|\\&=\max_r\max_{e^{-i\theta_0}\zeta}\max_\theta|P_k(r_0(e^{-i\theta_0}\zeta_0)e^{i\theta_0})|\\&\leqslant\max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|P_k(r\zeta e^{i\theta})|)).\end{aligned}$$

令 $P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})=P_k(r\zeta e^{i\theta})$，易知其为关于 θ 次数至多 k 的三角多项式．所以由（3.61）和引理 3.3.11，我们有

$$\begin{aligned}\|RP_k(z)\|_{A(D)}&=\max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|(RP_k)(r\zeta e^{i\theta})|))\\&=\max_r\left(\max_{|\zeta|=1}\left(\max_\theta\left|\frac{\partial}{\partial\theta}(P_{k,r,\zeta}(e^{i\theta}))\right|\right)\right)\\&\leqslant k\max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})|))\\&=k\max_r(\max_{|\zeta|=1}(\max_\theta|P_k(r\zeta e^{i\theta})|))\\&=k\|P_k(z)\|_{A(D)}.\end{aligned}$$

引理 3.3.13　设 $f(z)\in A(D)$，$r\in\mathrm{N}$，$h>0$. 则

$$\|\Delta_h^r f(z)\|_{A(D)}\leqslant h^r\|R^rf(z)\|_{A(D)}.$$

证明：直接估计得

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^r f(z)\|_{A(D)}&=\max_{z\in\overline{D}}\left|\sum_{k=0}^r\binom{r}{k}f(ze^{ikh})\right|\\&=\max_{z\in\overline{D}}\left|\int_0^h\cdots\int_0^h\frac{\partial^r}{\partial\theta_r\cdots\partial\theta_1}(f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}))d\theta_1\cdots d\theta_r\right|\\&\leqslant\int_0^h\cdots\int_0^h\max_{z\in\overline{D}}|R^rf(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})|d\theta_1\cdots d\theta_r\\&=\int_0^h\cdots\int_0^h\max_{z\in\overline{D}}|R^rf(z)|d\theta_1\cdots d\theta_r\end{aligned}$$

$$= h^r \| R^r f(z) \|_{A(D)}.$$

证毕.

通过相同方法，我们可以得到下面相应的结果.

定理 3.3.14　设 D 为有界的星形圆型域. 则对任意 $f(z) \in A(D)$，$h > 0$ 和 $r \in \mathrm{N}$，有

$$\omega_r(h, f, A(D)) \leqslant Ch^r \sum_{0 \leqslant k \leqslant h^{-1}} (k+1)^{r-1} E_k(f, A(D)),$$

其中常数 C 独立于 f，k.

定理 3.3.15　设 $f \in A(D)$. 则对 $0 < \gamma < 1$，

$$f \in Lip_{\gamma} \Longleftrightarrow E_k(f, A(D)) = O(k^{-\gamma}),$$

$$f \in Z \Longleftrightarrow E_k(f, A(D)) = O(k^{-1}).$$

第四章　K－泛函及其应用

本章主要考虑的对象是最简单的复平面上的单位圆盘U上的Q_p空间．我们引入Q_p空间中的K－泛函，并以此为工具来研究Riesz算子逼近的强逆不等式和其线性组合的逼近情况，Marchaud不等式及有界对称域A_μ空间上K－泛函与光滑模的等价性等等．对于其他全纯函数空间及定义域在单位球等上的对应函数空间亦可得到类似相应结果，本章不多做叙述.

§4.1　K－泛函和Riesz算子

J Peetre在1969年首次引入K－泛函（参见[9]），K－泛函是估计线性算子逼近收敛阶的一个很有用的工具．在逼近论中，K－泛函（参见[49,50,51]）为实参数函数，其可用来表示一个函数逼近的内在性质，和光滑模在逼近理论中都起着同等重要的作用.

在单位圆盘上的Q_p空间中，我们引入函数f的$\alpha\in R^+$阶K－泛函

$$K(f,t^\alpha;Q_p):=\inf_{R^\alpha g\in Q_p}\{\|f-g\|_{Q_p}+t^\alpha\|R^\alpha g\|_{Q_p}\},\tag{4.1}$$

其中$f\in Q_p$.

对函数$f(z)\in H(U)$，其具有Taylor展开（参见[5]）

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j,$$

其中$a_j\in C$，该级数在U中紧收敛.

我们引入全纯函数f关于齐次展开的所谓的Cesàro算子

$$C_k^l f(z):=\frac{1}{A_k^l}\sum_{j=0}^{n}A_{k-j}^l a_j z^j,\tag{4.2}$$

其中 $l \in \mathrm{N}$ 和

$$A_k^l = \frac{\Gamma(k+l+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)}.$$

Riesz 算子的定义为

$$R_{k,\alpha}(f, z) = \sum_{j=0}^{n}\left(1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\right)a_j z^j \quad . \tag{4.3}$$

§4.2 强逆不等式

回忆本文 2.2.1 小节，我们引入定义在 $[-\pi, \pi)$ 上的复测度：

$$d\mu_k^\rho(\varphi) = iC_k^l(\rho e^{i\varphi})^{1-k}\left[\frac{1-(\rho e^{i\varphi})^{k+1}}{1-\rho e^{i\varphi}}\right]^{l+1} d\varphi,$$

其中 $\rho \in (0, 1]$，$k \in \mathrm{N}$，

$$C_k^l = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(k)\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+l)}.$$

我们知 $d\mu_k^\rho(\varphi)$ 为$[-\pi,\pi)$ 上的概率测度，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\mu_k^\rho(\varphi) = 1 \quad . \tag{4.4}$$

由（4.2）和第二章引理 2.2.4 中的（2.37），我们易知：对 $\forall\ \rho \in (0,1]$，

$$\begin{aligned} C_k^l f(z) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+b)}\sum_{j=0}^{k}\frac{\Gamma(k+1-j+b)}{\Gamma(k+1-j)}a_j z^j \\ &= P_{k+1}[f](z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi} z)\, d\mu_{k+1}^\rho(\varphi) \quad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

引理 4.2.1 设 $f \in Q_p$. 则

$$\| C_k^l f \|_{Q_p} \lesssim \| f \|_{Q_p}.$$

证明：在（4.5）式中取 $\rho=1$，有

$$\| C_k^l f \|_{Q_p} = \sup_{w\in U}\left(\int_U \left|\frac{d}{dz}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\varphi} z)\, d\mu_{k+1}^1(\varphi)\right|^2 g^p(z,w)\, dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

注意到 Green 函数是正的函数，如下

$$g(z, w) = -\log|\varphi_w(z)|, \qquad z, w \in U,$$

其中 φ_w 为 Möbius 变换

$$\varphi_w(z)=\frac{w-z}{1-\overline{w}z}.$$

应用 Minkowski 不等式和（4.6）可得

$$\| C_k^l f \|_{Q_p} \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{w\in U}\left(\int_U |f'(e^{i\varphi}z)|^2 g^p(z,w)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu_{k+1}^1(\varphi).$$

注意到对任 $u=e^{i\varphi}z$ 和 $v=e^{i\varphi}w$，有

$$g(z,\ w)=g(u,\ v).$$

最后我们得

$$\| C_k^l f \|_{Q_p} \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{v\in U}\left(\int_U |f'(u)|^2 g^p(u,v)dm(u)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu_{k+1}^1(\varphi)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \| f \|_{Q_p} d\mu_{k+1}^1(\varphi)=\| f \|_{Q_p}.$$

证毕.

引理 4.2.2 设 $f\in Q_p$，其广义 Riesz 算子定义为

$$R_{k,\alpha,l}f(z):=\sum_{j=0}^{k}\left(1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\right)^{l}a_j z^j.$$

则

$$R_{k,\alpha,l}f=\sum_{j=0}^{k}C(j,\ k,\ \alpha,\ l)C_j^l f, \tag{4.7}$$

其中 $\sum_{j=0}^{k}|C(j,\ k,\ \alpha,\ l)|\leqslant M$，常数 M 与 k 无关.

证明：记

$$S_k f=S_k^{(1)}f=\sum_{j=0}^{k}a_j z^j,\cdots,S_k^{(l+1)}f=\sum_{j=0}^{k}S_j^{(l)}f.$$

易得

$$\binom{k+l}{l}C_k^l f=S_k^{(l+1)}f.$$

所以

$$a_j z^j=\sum_{s=0}^{l+1}(-1)^s\binom{l+1}{s}\binom{j+l-s}{l}C_{j-s}^l f:=\overleftarrow{\Delta}^{l+1}\left\{\binom{j+l}{l}C_j^l f\right\}.$$

其中 $\overleftarrow{\Delta}g(j)=g(j)-g(j-1)$ 和 $\overleftarrow{\Delta}^m g(j)=\overleftarrow{\Delta}(\overleftarrow{\Delta}^{m-1}g(j))$ 及 $C_{-r}^l f\equiv 0$，$r=1,2,\cdots$

连续 $l+1$ 次使用下面的 Abel 变换

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(b_j-b_{j-1})=(-1)\sum_{j=0}^{k-1}(a_{j+1}-a_j)b_j+a_kb_k, b_{-1}=0$$

我们可得

$$\sum_{j=0}^{k} a(j,k)F_j(z)=\sum_{j=0}^{k} a(j,k)\overleftarrow{\Delta}^{l+1}\left\{\binom{j+l}{l}C_j^l f\right\}$$

$$=(-1)^{l+1}\sum_{j=0}^{k-l-1}\binom{j+l}{l}C_j^l f\overleftarrow{\Delta}^{l+1}a(j,k)$$

$$+\sum_{j=0}^{l}(-1)^j\overleftarrow{\Delta}^j(k-j,k)\overleftarrow{\Delta}^{l-j}\left\{\binom{k-j+l}{l}C_{k-j}^l f\right\}$$

$$:=I+J$$

其中 $\overleftarrow{\Delta}g(j)=g(j+1)-g(j)$ ，$\overrightarrow{\Delta}(\overrightarrow{\Delta}^{m-1}g(j))$ 和

$$a(j,k)=\left(1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\right)^{l}. \tag{4.8}$$

为得到 I 的估计，只需证明

$$\sum_{j=0}^{k-l-1}\binom{j+l}{l}\left|\overrightarrow{\Delta}^{l+1}a(j,k)\right|\leqslant C \quad . \tag{4.9}$$

由（4.8），我们须证：$m=1, 2, \cdots, l$，

$$\sum_{j=0}^{k-l-1}\binom{j+l}{l}\left|\overrightarrow{\Delta}^{l+1}\left(\frac{j}{k}\right)^{m\alpha}\right|\leqslant C \quad . \tag{4.10}$$

易知，对 $k\geqslant k_0$，$\alpha<\beta$，有

$$\Delta^{l+1}k^{m\alpha} \mid\leqslant C_{m,l,\beta}\alpha k^{m\alpha}j^{-l-1}.$$

故可得

$$\left|\overrightarrow{\Delta}^{l+1}a(j,k)\right|\leqslant C\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{j}{k}\right)^{m\alpha}j^{-l-1}.$$

由

$$\binom{j+l}{l}\simeq j^1, \sum_{j=1}^{k} j^{m\alpha-1}\leqslant C\frac{1}{m\alpha}j^{m\alpha}. k>k_0.$$

所以存在与 α，k 无关的常数 M，

$$\left|\overrightarrow{\Delta}^{l+1}a(j,k)\right|\leqslant C\left(\frac{j}{k}\right)^{m\alpha}\leqslant M.$$

由（4.9）和（4.10），我们得 $I\leqslant M$.

为估计 J，我们回忆

$$\|\overleftarrow{\Delta}^{l-j}\binom{k-j+l}{l}C_{k-j}^{l}f\|_{Q_p}\leqslant Ck^{l}\|f\|_{Q_p}.$$

所以，只需证

$$|a(j,k)|\leqslant Ck^{-l}，对 k-l\leqslant j\leqslant k.$$

由中值定理，对 $k-l\leqslant j\leqslant \xi<k$，

$$1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}=\frac{k^{\alpha}-j^{\alpha}}{k^{\alpha}}=\frac{(k-j)\alpha\xi^{\alpha-1}}{k^{\alpha}}.$$

所以，

$$0\leqslant 1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\leqslant C\frac{\alpha}{k},$$

由此可得所需结果.

引理 4.2.3　设 $f\in Q_p$. 则

$$\|R_{k,\alpha,l}f\|Q_p\lesssim\|f\|_{Q_p}\quad.\tag{4.11}$$

特别地，当 $l=1$ 时，有

$$\|R_{k,\alpha}f\|Q_p\lesssim\|f\|_{Q_p}\quad.\tag{4.12}$$

证明：由引理 4.2.1 和引理 4.2.2，易证.

引理 4.2.4　设 $f\in H(U)$. 则

$$k^{\alpha}R_{k,\alpha}(R_{k,\alpha}f-f)=-R^{\alpha}R_{k,\alpha}f\quad.\tag{4.13}$$

证明：直接计算知，R^{α} 和 $R_{k,\alpha}$是可交换的，即，

$$R^{\alpha}R_{k,\alpha}f=R_{k,\alpha}R^{\alpha}f.$$

对任 $f\in H(U)$，有

$$\begin{aligned}R_{k,\alpha}(R_{k,\alpha}f-f)&=-\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{j=0}^{k}\left(1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\right)j^{\alpha}F_j(z)\\&=-\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{j=0}^{k}\left(1-\left(\frac{j}{k}\right)^{\alpha}\right)R^{\alpha}F_j(z)\\&=-\frac{1}{k^{\alpha}}R^{\alpha}R_{k,\alpha}f.\end{aligned}$$

即

$$k^{\alpha}R_{k,\alpha}(R_{k,\alpha}f-f)=-R^{\alpha}R_{k,\alpha}f.$$

我们经常使用 Q_p 空间的另一替换等价模．易知（参见[19]）函数 $f \in H(U)$ 属于 Q_p，$p \in [0,\infty)$，当且仅当

$$\sup_{w\in U}\int_U |Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z) < \infty.$$

同样，函数 $f(z) \in H(U)$ 属于 $Q_{p,0}$ 空间 $p \in [0,\infty)$ 当且仅当

$$\lim_{|w|\to 1^-}\int_U |Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z) = 0.$$

易知，小 Q_p 空间即 $Q_{p,0}$ 空间中多项式是稠密的．

引理 4.2.5　设 $\alpha > 0$ 和 $p \in [0,\infty)$，$R^\alpha f \in Q_p$．则

$$f\in Q_{p,0}.$$

证明：首先声称对任 $g \in H(U)$

$$\int_0^1 (1-r^2)\ p^{b-1} M_q^p(r,g)dr \leqslant$$

$$C(|f(0)|+\int_0^1 (1-r)^{p^\alpha}(1-r^2)^{pb-1}M_q^p(r,R^\alpha g)dr).$$

下证明该声明．

记 $u = min\{q,1\}$．令 $r = t^{p\alpha+1}$，则对任 $f \in H(U)$，有

$$\int_0^1 (1-r^2)\ p^{b-1} M_q^p(r,I^\alpha f)dr \leqslant C\int_0^1 t^{p\alpha}(1-r^2)\ p^{b-1}M_q^p(r,I^\alpha f)dr,$$

其中 I^α 为径向积分．易知（见[26]）对任 $g \in H(U)$

$$R^\alpha I^\alpha g = I^\alpha R^\alpha g = g - g(0),$$

$$I^\alpha g(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{\alpha-1}\rho^{\alpha-1}g(\rho z)d\rho.$$

记 $h(r) = r^{-1}M_q(r,f)$．由对任 $r \in (0,1)$ 和 $u > 0$，有 $1 \leqslant r^{-u}$，

$$\int_0^1 (1-r^2)\ p^{b-1}M_q^p(r,I^\alpha g)dr$$

$$\leqslant C\int_0^1 r^{p\alpha}(1-r^2)\ p^{b-1}\left\{\int_0^1 (\ln 1/\rho)^{bu-1}\rho^{u-1}h(r\rho)^u d\rho\right\}^{p/u}dr.$$

因为 $r^{-1}M_q(r,f)$ 为不减的连续函数，可被 $C\int_0^1 r^{-p}(1-r)^{p\alpha}(1-r^2)$ $p^{b-1}M_q^p(r,f)dr$ 控制，即

$$\int_0^1 (1-r^2)\ p^{b-1}M_q^p(r,g)dr \leqslant C\int_0^1 (1-r)^{p\alpha}(1-r^2)^{p^{b-1}}M_q^p(r,R^\alpha g)dr.$$

设 $g(0)=0$，则 $g=I^{\alpha}(R^{\alpha}g)$. 在上面不等式中用 $R^{\alpha}g$ 替换掉 g，可得

$$\int_0^1(1-r^2)\,p^{b-1}M_q^p(r,g)dr\leqslant C\int_0^1(1-r^2)\,p^{b-1}M_q^p(r,I^{\alpha}(R^{\alpha}g))dr$$

$$\leqslant C\int_0^1(1-r)^{p\alpha}(1-r^2)\,p^{b-1}M_q^p(r,R^{\alpha}g)dr.$$

现在，用 $g-g(0)$ 替换 g，由 $R^{\alpha}(g-g(0))=R^{\alpha}g$ ，我们得到

$$\int_0^1(1-r^2)\,p^{b-1}M_q^p(r,\ g)dr\leqslant C(|f(0)|+\int_0^1(1-r)^{p\alpha}(1-r^2)\,p^{b-1}M_q^p(r,R^{\alpha}g)dr).$$

不失一般性，令 $f(0)=0$ ，做变换 $v=\varphi_w(z)$(共形不变的) 得

$$\int_U|Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)$$

$$=\int_U|Rf(\varphi_w(v))|^2(1-|v|^2)^p dm(v)$$

$$\leqslant C\int_U|R^{\alpha}Rf(\varphi_w(v))|^2(1-|v|^2)^p(1-|v|)^{2\alpha}dm(v)$$

$$=C\int_U|R^{\alpha}Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}dm(z)$$

对 $R^{\alpha}f\in Q_p$，可知

$$\sup_{w\in U}\int_U|R^{1+\alpha}f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)<\infty,$$

故

$$\lim_{|w|\to1^-}\int_{|z|\leqslant1-\delta}|R(R^{\alpha}f(z))|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}dm(z)$$

$$\leqslant\lim_{|w|\to1^-}\sup_{|z|\leqslant1-\delta}(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}=0$$

和

$$\sup_{w\in U}\int_U|R^{1+\alpha}f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}dm(z)<\infty,$$

故，对任 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，

$$\int_{|z|>1-\delta}|R^{1+\alpha}f(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}dm(z)<\epsilon.$$

则

$$\int_U|Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)$$

$$\leqslant C\int_U |R^\alpha Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p(1-|\varphi_w(z)|)^{2\alpha}dm(z)$$

$$\leqslant C\int_{|z|>1-\delta}\cdots dm(z)+\int_{|z|\leqslant 1-\delta}\cdots dm(z).$$

最终，

$$\lim_{|w|\to 1^-}\int_U |Rf(z)|^2(1-|\varphi_w(z)|^2)^p dm(z)=0,$$

意味着 $f\in Q_{p,0}$.

引理 4.2.6　设 $R^\alpha f\in Q_p$. 则

$$\| R_{k,\alpha} f-f\|_{Q_p}\lesssim\frac{1}{k^\alpha}\| R^\alpha f\|_{Q_p}\quad. \tag{4.14}$$

证明：我们假设 $R^\alpha f\in Q_p$. 在此假设下，由引理 4.2.5 得 $f\in Q_{p,0}$. 由引理 4.2.4 有

$$R_{k,\alpha}^2 f-R_{k,\alpha}f=-\frac{R^\alpha R_{k,\alpha} f}{k^\alpha}.$$

对任 k，$m\in \mathrm{N}$，$f\in Q_p$，可知

$$R_{k,\alpha}R_{m,\alpha} f=R_{m,\alpha}R_{k,\alpha} f. \tag{4.15}$$

由定义，得作用在多项式上的算子

$$R_{m,\alpha}-R_{m+1,\alpha}=\frac{m^\alpha-(m+1)^\alpha}{m^\alpha(m+1)^\alpha}R^\alpha.$$

这意味着作为 $H(\mathrm{U})$ 上算子

$$R_{m,\alpha}^2-R_{m+1,\alpha}^2=\frac{m^\alpha-(m+1)^\alpha}{m^\alpha(m+1)^\alpha}(R_{m,\alpha}R^\alpha+R_{m+1,\alpha}R^\alpha).$$

注意到

$$(m+1)^\alpha-m^\alpha\simeq \alpha m^{\alpha-1}\quad m\to\infty,$$

引理 4.2.3 可导出

$$\| R_{m,\alpha}^2 f-R_{m+1,\alpha}^2 f\|_{Q_p}\leqslant\frac{C(\alpha)}{m(m+1)^\alpha}\| R^\alpha f\|_{Q_p}.$$

由于 $f\in Q_{p,0}$，对任 $\epsilon>0$ 则存在一多项式 g 满足 $\| f-g\|_{Q_p}<\epsilon$. 因为 g 为全纯多项式，易证实

$$\lim_{k\to\infty}\| R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}=0\quad. \tag{4.16}$$

故可得出

$$\begin{aligned}\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}&\leqslant\|R_{k,\alpha}f-R_{k,\alpha}g\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}+\|f-g\|_{Q_p}\\&\leqslant C\|f-g\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}\\&\leqslant C\epsilon+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}\end{aligned}$$

故

$$\lim_{k\to\infty}\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}=0.$$

则当 $k\to\infty$

$$\begin{aligned}\|R_{k,\alpha}^2f-f\|_{Q_p}&\leqslant R_{k,\alpha}^2f-R_{k,\alpha}f\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}\\&\lesssim\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}\to 0.\end{aligned}$$

最后一步利用了引理 4.2.3.

对任 $R^\alpha f\in Q_p$，最终得

$$\begin{aligned}\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}&\leqslant\|R_{k,\alpha}^2f-R_{k,\alpha}f\|_{Q_p}+\sum_{m=k}^{\infty}\|R_{m,\alpha}^2f-R_{m+1,\alpha}^2f\|_{Q_p}\\&\lesssim\left(\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)^\alpha}\right)\|R^\alpha f\|_{Q_p}\\&\lesssim\frac{\|R^\alpha f\|_{Q_p}}{k^\alpha}\end{aligned}$$

引理得证.

定理 4.2.7 设 $f\in Q_p$. 则

$$\|R_{k,\alpha}f-f\|Q_p\simeq K(f,k^{-\alpha};Q_p).$$

证明：令 $f\in Q_p$. 选择 $R^\alpha g\in Q_p$ 使得

$$\|f-g\|_{Q_p}+k^{-\alpha}\|R^\alpha g\|_{Q_p}\leqslant 2K(f,k^{-\alpha};Q_p).$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}&\leqslant\|R_{k,\alpha}(f-g)-(f-g)\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}\\&\lesssim\|f-g\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}\\&\lesssim K(f,k^{-\alpha};Q_p)+\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}.\end{aligned}$$

由引理 4.2.6，有

$$\|R_{k,\alpha}g-g\|_{Q_p}\lesssim\frac{1}{k^\alpha}\|R^\alpha g\|_{Q_p}\lesssim K(f,k^{-\alpha};Q_p).$$

结合上面不等式，我们有

$$\| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p} \lesssim K(f, k^{-\alpha}; Q_p).$$

为证明反方向的结果，由引理 4.2.4 和引理 4.2.3，有

$$\| R^{\alpha} R_{k,\alpha} f \|_{Q_p} \lesssim k^{\alpha} \| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p}.$$

由 K－泛函的定义得

$$\begin{aligned} K(f, k^{-\alpha}; Q_p) &\leqslant \| f - R_{k,\alpha} f \|_{Q_p} + k^{-\alpha} \| R^{\alpha} R_{k,\alpha} f \|_{Q_p} \\ &\lesssim \| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p}. \end{aligned}$$

定理得证.

现在，我们给出最佳多项式逼近和 Riesz 算子的弱等价结果.

定理 4.2.8　设 $f \in Q_p$，$\alpha \in \mathbb{N}$. 则

$$E_k(f, Q_p) \leqslant \| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p}.$$

反过来，

$$\| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p} \leqslant \frac{C(p, \alpha)}{k^{\alpha}} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (j+1)^{\alpha-1} E_j(f, Q_p).$$

特别地，对 $0 < \beta < \alpha$，

$$\| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p} = O(k^{-\beta}), (k \to \infty),$$

当且仅当

$$E_k(f, Q_p) = O(k^{-\beta}), (k \to \infty).$$

证明：第一个不等式是显然的．考虑第二个不等式，用 P_k 表示 f 的次数至多为 k 的最佳逼近多项式．我们已知 Q_p 空间中的 Bernstein 不等式（见定理 3.2.3）：

$$\| RP_k \|_{Q_p} \leqslant C(p) k \| P_k \|_{Q_p}.$$

则对任整数 $m \geqslant 0$，由引理 4.2.3 得

$$\| R_{k,\alpha} f - f \|_{Q_p} \leqslant CE_{2^m}(f, Q_p) + \| R_{k,\alpha} P_{2^m} - P_{2^m} \|_{Q_p}. \quad (4.17)$$

令 $P_{-1} = 0$ 并记

$$P_{2^m} = \sum_{j=0}^{m} (P_{2^j} - P_{2^{j-1}}).$$

由引理 4.2.6 和 Bernstein 不等式，可得

$$\| R_{k,\alpha} P_{2^m} - P_{2^m} \|_{Q_p} \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \| R^{\alpha} P_{2^m} \|_{Q_p}$$

$$\leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \sum_{j=0}^{m} \| R^{\alpha}(P_{2^j} - P_{2^{j-1}}) \|_{Q_p}$$

$$\leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \sum_{j=0}^{m} 2^{j\alpha} \| P_{2^j} - P_{2^{j-1}} \|_{Q_p}$$

$$\leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \sum_{j=0}^{m} 2^{j\alpha} E_{2^j}(f, Q_p).$$

考虑到

$$2^{j\alpha} E_{2^j}(f, Q_p) \leqslant 2^{\alpha} \sum_{l=2^{j-1}+1}^{2^j} l^{\alpha-1} E_l(f, Q_p),$$

我们得

$$\| R_{k,\alpha} P_{2^m} - P_{2^m} \|_{Q_p} \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \sum_{j=0}^{2^m} (j+1)^{\alpha-1} E_j(f, Q_p).$$

最后我们选择 m 使满足 $2^{m-1} \leqslant k < 2^m$，结合不等式（4.17），可得所需结果．其余显然，故定理 4.2.8 得证．

由定理 4.2.7 和定理 4.2.8 易得：

定理 4.2.9 设 $f \in Q_p$，$\alpha \in \mathrm{N}$. 则

$$E_k(f, Q_p) \leqslant K(f, k^{-\alpha}; Q_p).$$

反过来，

$$K(f, k^{-\alpha}; Q_p) \leqslant \frac{C(p, \alpha)}{k^{\alpha}} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} (j+1)^{\alpha-1} E_j(f, Q_p).$$

特别地，对 $0 < \beta < \alpha$，

$$K(f, k^{-\alpha}; Q_p) = O(k^{-\beta}), (k \to \infty),$$

当且仅当，

$$E_k(f, Q_p) = O(k^{-\beta}), (k \to \infty).$$

§4.3 线性组合逼近

我们首先给出一些引理．

引理 4.3.1 对 $r \in \mathrm{N}$ 和 $f \in H(U)$ 且满足 $R^{r\alpha} f \in Q_p$，有

$$\| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p} \leqslant C(\alpha, r) n^{-r\alpha} \| R^{r\alpha} f \|_{Q_p},$$

其中 I 表示恒等算子．

证明：对 $R^{r\alpha}f\in Q_p$，由引理 4.2.6 可得

$$\begin{aligned}\|(R_{k,\alpha}-I)^r f\|_{Q_p} &\leqslant C(\alpha)k^{-\alpha}\|R^\alpha(R_{k,\alpha}-I)^{r-1}f\|_{Q_p}\\ &= C(\alpha)k^{-\alpha}\|(R_{k,\alpha}-I)^{r-1}(R^\alpha f)\|_{Q_p}\\ &\leqslant\cdots\leqslant C(\alpha)^r k^{-r\alpha}\|R^{r\alpha}f\|_{Q_p}.\end{aligned}$$

引理 4.3.2　设 $f\in H(U)$ 且满足 $R^{r\alpha}f\in Q_p$．则对 $m\in\mathrm{N}$，有

$$k^{-\alpha}\|R^\alpha R^m_{k,\alpha}f\|_{Q_p}\lesssim\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}.$$

证明：由引理 4.2.4，我们有

$$k^{-\alpha}\|R^\alpha R_{k,\alpha}f\|_{Q_p}=\|R_{k,\alpha}(R_{k,\alpha}f-f)\|_{Q_p}\quad.\tag{4.18}$$

则从引理 4.2.3 和（4.18）知

$$\begin{aligned}k^{-\alpha}\|R^\alpha R^m_{k,\alpha}f\|_{Q_p} &= k^{-\alpha}\|R^m_{k,\alpha}R^\alpha f\|_{Q_p}\\ &\lesssim k^{-\alpha}\|R_{k,\alpha}R^\alpha f\|_{Q_p}\\ &= k^{-\alpha}\|R^\alpha R_{k,\alpha}f\|_{Q_p}\\ &= \|R_{k,\alpha}(R_{k,\alpha}f-f)\|_{Q_p}\\ &\lesssim\|R_{k,\alpha}f-f\|_{Q_p}.\end{aligned}$$

定理 4.3.3　对 $f\in Q_p$，有

$$\|(R_{k,\alpha}-I)^r f\|_{Q_p}\simeq K(f,k^{-r\alpha};Q_p)=\cdots$$

$$Q_p=\inf_{R^{r\alpha}g\in Q_p}\{\|f-g\|_{Q_p}+k^{-r\alpha}\|R^{r\alpha}g\|_{Q_p}\}.\tag{4.19}$$

证明：（1）我们首先证明

$$\|(R_{k,\alpha}-I)^r\|_{Q_p}\lesssim K(f,k^{-r\alpha};Q_p).$$

与定理 4.2.7 证明类似．选取合适 g 使满足 $R^{r\alpha}g\in Q_p$ 和

$$\|f-g\|_{Q_p}+k^{-r\alpha}\|R^{r\alpha}\|_{Q_p}\leqslant 2K(f,k^{-r\alpha};Q_p).$$

由定理 4.2.7 和引理 4.3.1，我们可得

$$\begin{aligned}&\|(R_{k,\alpha}-I)^r f\|_{Q_p}\\ &\leqslant\|(R_{k,\alpha}-I)^r(f-g)\|_{Q_p}+\|(R_{k,\alpha}-I)^r g\|_{Q_p}\\ &\lesssim K((R_{k,\alpha}-I)^{r-1}(f-g),k^{-\alpha};Q_p)+\|(R_{k,\alpha}-I)^r g\|_{Q_p}\\ &\lesssim\cdots\lesssim\|f-g\|_{Q_p}+\|(R_{k,\alpha}-I)^r g\|_{Q_p}\\ &\lesssim\|f-g\|_{Q_p}+k^{-r\alpha}\|R^{r\alpha}g\|_{Q_p}\end{aligned}$$

$\leqslant 2K(f, k^{-r\alpha}; Q_p)$.

(2) 下证不等式的反方向 . 证明是构造性的，就是说，我们需找到 g 满足

$$\| f - g \|_{Q_p} \leqslant C \| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p}$$

和

$$k^{-r\alpha} \| R^{r\alpha} g \|_{Q_p} \leqslant C \| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p}.$$

对 $r=1$，显然与定理 4.2.7 中相同取 $g = R_{k,\alpha} f$. 对 $r>1$，我们选取

$$g = \sum_{l=1}^{r} \binom{r}{l} (-1)^{l-1} R_{k,\alpha}^{l} f.$$

现在记

$$\| f - g \|_{Q_p} = \| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p}.$$

现在我们估计 $\| R^{r\alpha} g \|_{Q_p}$，只需证明

$$k^{-r\alpha} \| R^{r\alpha} R_{k,\alpha}^{l} f \|_{Q_p} \leqslant C \| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p}.$$

多次利用引理 4.3.2，可得

$$\begin{aligned} k^{-r\alpha} \| R^{r\alpha} R_{k,\alpha}^{l} f \|_{Q_p} &= k^{-r\alpha} \| R^{\alpha} R_{k,\alpha} R^{(r-1)\alpha} R_{k,\alpha}^{l-1} f \|_{Q_p} \\ &\lesssim k^{-(r-1)\alpha} \| (R_{k,\alpha} - I) R^{(r-1)\alpha} R_{k,\alpha}^{l-1} f \|_{Q_p} \\ &= k^{-(r-1)\alpha} \| (R^{(r-1)\alpha} R_{k,\alpha}^{l-1} (R_{k,\alpha} - I) f \|_{Q_p} \\ &\lesssim \cdots \lesssim \| (R_{k,\alpha} - I)^r f \|_{Q_p}. \end{aligned}$$

定理 4.3.4 设 $f \in Q_p$ 及

$$L_{k,r} f := \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{r}{j} R_{n,\alpha}^{j} f.$$

则

$$\| f - L_{k,r} f \|_{Q_p} + k^{-2r} \| R^r L_{k,r} f \|_{Q_p} \simeq K(f, k^{-2r}; Q_p).$$

证明：由定理 4.3.3，我们只需证

$$k^{-r\alpha} \| R^{r\alpha} L_{k,r} f \|_{Q_p} \lesssim K(f, k^{-r\alpha}; Q_p) \quad . \tag{4.20}$$

多次利用引理 4.2.4 和

$$R^{\alpha} R_{k,\alpha} g = R_{k,\alpha} R^{\alpha} g, g \in Q_p,$$

可得

$$R^{r\alpha} R_{k,\alpha}^{j} f = (-1)^r k^{r\alpha} R_{k,\alpha}^{j} (R_{k,\alpha} - I)^r f.$$

所以，

$$\begin{aligned} k^{-r\alpha}\|R^{r\alpha}R_{k,\alpha}^{j}f\|_{Q_p} &= \|R_{k,\alpha}^{j}(R_{k,\alpha}-I)^{r}f\|_{Q_p} \\ &\lesssim \|(k_{k\alpha}-I)^{r}f\|_{Q_p} \\ &\lesssim K(f,\ k^{-r\alpha};Q_p). \end{aligned}$$

由上公式，(4.20) 易得.

推论 4.3.5　对 $K(f,k^{-r\alpha};Q_p)$ 由(4.19) 给出，则

$$K(f,k^{-(r+1)\alpha};Q_p)\lesssim K(f,k^{-r\alpha};Q_p).$$

证明：参照定理 4.3.3，我们仅需知道

$$\begin{aligned} \|f-L_{k,r+1}f\|_{Q_p} &= \|(I-R_{k,\alpha})(f-L_{k,r}f)\|_{Q_p} \\ &\leqslant \|f-L_{k,r}f\|_{Q_p}+\|R_{k,\alpha}(f-L_{k,r}f)\|_{Q_p} \\ &\lesssim \|f-L_{k,r}f\|_{Q_p} \\ &\lesssim K(f,k^{-r\alpha};Q_p). \end{aligned}$$

得证.

§4.4　Marchaud 不等式

本节分别给出关于 K－泛函和光滑模的重要结果 - Marchaud 不等式，即高阶控制低阶的逼近问题.

定理 4.4.1　对 $K(f,t;Q_p)$ 由(4.19) 给出，$r,\alpha\in\mathrm{N}$，则

$$K(f,t^{r\alpha};Q_p)\lesssim t^{r\alpha}\left(\int_t^1\frac{K(f,u^{(r+1)\alpha};Q_p)}{u^{r\alpha+1}}du\right).$$

证明：记 $m=[1/t]$，由定理 4.3.3，则

$$\begin{aligned} K(f,t^{r\alpha};Q_p) &\leqslant \|f-L_{m,r+1}f\|_{Q_p}+t^{r\alpha}\|R^{\alpha}L_{m,r+1}f\|_{Q_p} \\ &\leqslant CK(f,m^{-\alpha(r+1)};Q_p)+t^{r\alpha}\|R^{\alpha}L_{m,r+1}f\|_{Q_p}. \end{aligned}$$

选择 k 满足 $2^k\leqslant m<2^{k+1}$ 并记

$$L_{m,r+1}f=L_{m,r+1}f-L_{2^k,r+1}f+\sum_{l=1}^{k}(L_{2^l,r+1}f-L_{2^{l-1},r+1}f)+L_{1,r+1}.$$

使用 $L_{1,r+1}f=C$，和 $R^{\alpha}L_{1,r+1}f=0$ 及

$$\|L_{2^l,r+1}f-L_{2^{l-1},r+1}f\|_{Q_p}\leqslant CK(f,2^{-\alpha(r+1)(l-1)};Q_p),$$

由 Bernstein 不等式（见定理 3.2.3），我们有

$$K(f,\ t^{r\alpha};Q_p)\leqslant CK(f,m^{-\alpha(r+1)};Q_p)+t^{r\alpha}\sum_{l=0}^{k-1}C2^{\alpha lr}K(f,\ 2^{-\alpha(r+1)l};Q_p)$$
$$+Ct^{r\alpha}m^{r\alpha}K(f,\ 2^{-\alpha(r+1)k};Q_p).$$

利用 $K(f,u;Q_p)$ 和 u^α 的单调性，可得所需结果.

另外还有关于光滑模的 Mauchard 不等式如下.

定理 4.4.2 设 $f\in Q_p,r,s\in\mathrm{N}$ 且 $1\leqslant r<s$. 则对 $0<t<1/2$，有

$$\omega_r(t,f,Q_p)\leqslant Ct^r\int_t^1\frac{\omega_s(u,f,Q_p)}{u^{r+1}}du.$$

证明：首先我们先给出一个恒等式（直接计算易验证）

$$(1-x)^r=2^{-r}(1-x^2)^r+Q(x)(1-x)^{r+1},$$

其中 $Q(x)=(1-(x+1)^r/2^r)/(1-x)$.

给出所谓平移算子 τ_h ：

$$\tau_h f(z)=f(ze^{ih}).$$

用平移算子 τ_h 替换上式中的 x，可得

$$\Delta_h^r f=2^{-r}\Delta_{2h}^r f-Q(\tau_h)\Delta_h^{r+1}f.$$

因为 $Q(x)$ 为 $r-1$ 次多项式，τ_h 为 Q_p 空间模为 1 的算子，故 $\|Q(\tau_h)\|_{Q_p}$ 有界. 所以

$$\|\Delta_h^r f\|_{Q_p}\leqslant 2^{-r}\|\Delta_{2h}^r f\|_{Q_p}+C\|\Delta_h^{r+1}f\|_{Q_p}\leqslant 2^{-r}\|\Delta_{2h}^r f\|_{Q_p}+C\omega_{r+1}(h,\ f,\ Q_p).$$

重复利用上面不等式 m 次，并光滑模性质，可得

$$\|\Delta_h^r f\|_{Q_p}\leqslant 2^{-mr}\|f\|_{Q_p}+C\sum_{j=0}^{m}2^{-rj}\omega_{r+1}(2^jh,\ f,\ Q_p).$$

对 h 在$[0,t]$取上确界并由光滑模的单调性，我们得

$$\omega_r(t,\ f,\ Q_p)\leqslant 2^{-mr}\|f\|_{Q_p}+Ct^r\sum_{j=0}^{m}(2^jt)^{-r}\omega_{r+1}(2^jt,\ f,\ Q_p)$$
$$\leqslant 2^{-mr}\|f\|_{Q_p}+C2^rt^r\sum_{j=0}^{m}\int_{2^jt}^{2^{j+1}t}\frac{\omega_{r+1}(2^ju,\ f,\ Q_p)}{u^{r+1}}du.$$

取 m 满足 $2^{-1}\leqslant 2^{m+1}t<1$，则上式可推出

$$\omega_r(t,\ f,\ Q_p)\leqslant Ct^r\left(\int_t^1\frac{\omega_{r+1}(u,\ f,\ Q_p)}{u^{r+1}}du+\|f\|_{Q_p}\right).$$

因为当 $r>0$ 时，$\Delta_h^rC_0=0$. 故上式可用 $f-C_0$ 代替 f. 由 Jackson 定理得

$$\inf_{C_0\in C}\|f-C_0\|_{Q_p}\leqslant C\omega_{r+1}(1,f,Q_p)\leqslant C\int_{1/2}^{1}\frac{\omega_{r+1}(u,f,Q_p)}{u^{r+1}}du.$$

上式用到：当 $1/2\leqslant u\leqslant 1$ 时，$\omega_{r+1}(u,f,Q_p)\simeq 1$. 故上式 $\|f\|_{Q_p}$ 可去掉，这就证明了 $s=r+1$ 时的情况. 更一般 $s>r+1$ 情况，易通过归纳证明.

§4.5　K－泛函与光滑模等价性

在逼近论中，光滑模是研究函数中心逼近正逆定理的基本工具，而在很多逼近问题中，K－泛函[51]起到很重要作用，它们都表示了函数的一些本质的逼近特性．故研究 K－泛函和光滑模相互关系成为函数逼近论的主要问题之一.

我们以星形圆型域上的 Hardy 型空间为例给出空间上 K－泛函与光滑模多个等价性定理．对 Q_p 等函数空间也易得出类似逼近结果.

令 D 为 C^n 上的圆型域，即，对任 $z\in D$ 和 $\theta\in R$，均有 $e^{i\theta}z\in D$. D 为星形域，即，对任 $z\in D$ 和 $|\lambda|<1$，均有 $\lambda z\in D$. 设 X 为 D 上具有旋转不变的半模 $\|\cdot\|_X$ 的空间，对任 $f\in X$，$\delta>0$，$r\in N$，f 的 r 阶光滑模定义为：

$$\omega_r(\delta,f,X):=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^r f(z)\|_X=\sup_{0<h\leqslant\delta}\|\vec{\Delta}_h^r f(z)\|_X,\quad(4.21)$$

这里中心差分 Δ_h^r 与向前差分 $\vec{\Delta}_h^r$ 为

$$\Delta_h^r f(z)=\vec{\Delta}_h^r f(ze^{-\frac{r}{2}hi})=\Delta_h\Delta_h^{r-1}f(z)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r}{j}f(e^{i(\frac{r}{2}-j)h}z).$$

$H(D)$ 表示 D 上全纯函数全体．易知对任 $f\in H(D)$，都存在齐次多项式展开

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}F_j(z),\quad(4.22)$$

其中 $F_j(z)$ 为 j 次齐次多项式且级数在 D 上紧收敛．f 在 z 点的 α 阶径向导数为

$$R^\alpha f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}j^\alpha F_j(z),\quad\alpha\geqslant 0.$$

在 C^n 中的星型圆形域 D 上引入 f 的径向导数定义新的 $\alpha\in R^+$ 阶 K－泛函

$$K_\alpha(f, t^\alpha; X) := \inf_{R^\alpha g \in X} \{ \| f - g \| X + t^\alpha \| R^\alpha g \| X \}, \tag{4.23}$$

其中 $f \in X$.

Z. Ditzian 等获得了在 $L_p([-\pi,\pi])$ 空间中光滑模和 K－泛函的等价性：

定理 A[50]　对 $f \in L_p([-\pi,\pi])$，$0 < p \leqslant \infty$，有

$$\omega_r(f, t)_p \simeq K_r(f, t^r) := \inf_{T \in \tau_n = [1/t]} (\| f - T \|_p + n^{-r} \| T^r \|_p),$$

其中 τ_n 为 n 次三角多项式全体.

其后等价性推广至实球面调和函数空间上[52,53]，分别采用微分－差分算子（即 Dunkl 算子）和球面 Beltrami－Laplace 算子来定义 K－泛函和光滑模，更多亦可参看著作[8]. 本节主要目的是研究在多复变星形圆型域 D 上的 Hardy 型空间上的结果，类似结果可在 Q_p 等函数空间获得.

引理 4.5.1[1,47]　设 $T_k(\theta)$ 为任次数至多为 k 的三角多项式. 则对 $0 < p < \infty$，有

$$\int_0^{2\pi} | T_k'(\theta) |^p d\theta \leqslant k^p \int_0^{2\pi} | T_k(\theta) |^p d\theta.$$

引理 4.5.2[15]　若 $g(z) \in H^p(U)$，$0<p<1$ 和 $r \in N$，则

$$\int_0^{2\pi} | \vec{\Delta}_{h,\theta}^r g(e^{i\theta}) |^p d\theta \leqslant C h^{rp} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} (g(e^{i\theta})) \right|^p d\theta,$$

其中

$$\vec{\Delta}_{h,\theta}^r g(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} g(e^{i(\theta+jh)})$$

和 C 为仅依赖 p，r 的常数.

引理 4.5.3　设 $f(z) \in A_\mu$，$r \in N$. 则

$$\omega_r(t, f, A_\mu) \leqslant C t^r \| R^r f(z) \|_{A_\mu}.$$

证　对 p 分情况讨论.

(ⅰ) 当 $p \geqslant 1$ 时，我们可得

$$\begin{aligned} \Delta_h^r f(z) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^r}{\partial\theta_1 \cdots \partial\theta_r} (f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})) d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} i^r R^r f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}) d\theta_1 \cdots d\theta_r. \end{aligned}$$

所以由 Minkowski 不等式，有

$$\begin{aligned}\| \triangle_h^r f(z) \|_{A_\mu} &= \sup_{a\in\Gamma}\left(\int_D \left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} i^r R^r f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}) d\theta_1 \cdots d\theta_r \right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sup_{a\in\Gamma}\int_D | R^r f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}) |^p\right)^{\frac{1}{p}} d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ &= h^r \| R^r f(z) \|_{A_\mu}.\end{aligned}$$

（ⅱ）当 $0<p<1$ 时．同理于（3.51）证明，可得

$$\| \triangle_h^r f(z) \|_{A_\mu}^p = \| \vec{\triangle}_h^r f(z) \|_{A_\mu}^p = \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} | \vec{\triangle}_h^r f(ze^{i\theta}) |^p d\theta d\mu_a(z). \tag{4.24}$$

令 $g_z(e^{i\theta}) = f(ze^{i\theta})$．易知

$$\begin{aligned}\vec{\triangle}_h^r f(ze^{i\theta}) &= \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} f(ze^{i(\theta+jh)}) \\ &= \vec{\triangle}_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta}).\end{aligned}$$

利用（4.24），引理4.5.1和（3.52），得

$$\begin{aligned}\| \triangle_h^r f(z) \|_{A_\mu}^p &= \frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} | \vec{\triangle}_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta}) |^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leqslant C\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D h^{rp}\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^r}{\partial\theta^r}(g_z(e^{i\theta})) \right|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &= Ch^{rp}\frac{1}{2\pi}\sup_{a\in\Gamma}\int_D\int_0^{2\pi} | R^r f(ze^{i\theta}) |^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leqslant Ch^{rp} \| R^r f(z) \|_{A_\mu}^p\end{aligned}$$

综合（ⅰ）（ⅱ）得

$$\| \Delta_h^r f(z) \|_{A_\mu} \leqslant Ch^r \| R^r f(z) \|_{A_\mu}.$$

对上式两端取 $\sup_{0<h<t}$，引理得证．

定理 4.5.4　设 $f\in A_\mu$，$0<p<\infty$，$1>t>0$，$r\in \mathrm{N}$. 则

$$\omega_r(t, f, A_\mu) \simeq K(f, t^r; A_\mu).$$

证　任取 $g \in H(D)$ 且满足 $R^r g \in A_\mu$，由引理4.5.3可知

$$\begin{aligned}\omega_r(t, f, A_\mu) &\leqslant C(\omega_r(t, f-g, A_\mu) + \omega_r(t, g, A_\mu)) \\ &\leqslant C\{ \| f-g \|_{A_\mu} + t^r \| R^r g \|_{A_\mu} \}.\end{aligned}$$

故

$$\omega_r(t, f, A_\mu) \leqslant CK(t^r, f, A_\mu).$$

接下来证

$$K(t^r, f, A_\mu) \leqslant C\omega_r(t, f, A_\mu).$$

取 $k=\left[\frac{1}{t}\right]$，即 $k\leqslant\frac{1}{t}<k+1$. 由 Jackson 定理[54]，易知存在并可构造出具体 k 次多项式 $P_k(z)$，有

$$\| f(z)-P_k(z) \|_{A_\mu} \leqslant C\omega_r(k^{-1}, f, A_\mu).$$

直接计算，易得步长 $h>0$ 的中心差分的性质[7]：

$$\Delta_h^r x^k = 0,\ k<r;$$

$$\Delta_h^r x^r = r!\ h^r;$$

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j\left(\frac{r}{2}-j\right)^{r+2l-1} = 0, \forall\, l \in \mathrm{N};$$

$$\Delta_h^l f(x_0) = h^l f^{(l)}(\xi),$$

其中 $x_0-\frac{lh}{2}<\zeta<x_0+\frac{lh}{2}$.

记 $P_{k,r\zeta}(e^{i\theta}) = P_k(z) = P_k(r\zeta e^{i\theta})$，其中 $z = r\zeta e^{i\theta}$，$\zeta\in\partial D$. $P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})$ 可看作关于 θ 的 k 次三角多项式 . 由 Taylor 展开及中心差分性质可得

$$\begin{aligned}
\Delta_h^r P_k(z) &= \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j P_k\left(ze^{i(\frac{r}{2}-j)h}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j P_{k,r\zeta}\left(e^{i\left(\theta+\left(\frac{r}{2}-j\right)h\right)}\right)\\
&= \sum_{l=r}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j\left(\frac{r}{2}-j\right)^l\frac{h^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}(P_{k,r\zeta}(e^{i\theta}))\\
&= h^r i^r R^r P_k(z) + \sum_{l=r+1}^{\infty}\eta(r,l)^{l-r}\frac{h^l}{(l-r)!}i^l R^l P_k(z),
\end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $-\frac{r}{2}<\eta(r,l)<\frac{r}{2}$ 和当 $l-r$ 为奇的非负整数时，$\eta(r,l)=0$.

再由 Bernstein 不等式（即定理 3.3.1）$\| RP_k(z)\|_{A_\mu} \leqslant k\| P_k(z)\|_{A_\mu}$，可知

$$\| R^l P_k(z)\|_{A_\mu} \leqslant k^{l-r}\| R^r P_k(z)\|_{A_\mu} \quad . \tag{4.26}$$

取 $s=\min\{1, p\}$，对于 $|\hbar|<\frac{C}{k}\leqslant\frac{1}{k}$，其中常数 $C=C(r, s)$ 与 k 无关.

故由（4.25）和（4.26），得

$$-\|\triangle_h^r P_k\|_{A_\mu}^s + h^{rs}\|R^r P_k\|_{A_\mu}^s \leqslant \|\triangle h_h^r P_k - h^r i^r R^r P_k\|_{A_\mu}^s$$

$$\leqslant h^{rs}\|R^r P_k\|_{A_\mu}^s \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h^{(r+2l)s}k^{2s}}{((2l)!)^s}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h^{rs}\|R^r P_k\|_{A_\mu}^s \quad . \qquad (4.27)$$

故对 $t\leqslant\frac{1}{k}$，可得

$$\omega_r^s(t,P_k,A_\mu) \leqslant \omega_r^s(t,P_k-f,A_\mu)+\omega_r^s(t,f,A_\mu)$$

$$\leqslant 2^{rs}\|P_k-f\|_{A_\mu}^s+\omega_r^s\left(\frac{1}{k},f,A_\mu\right)$$

$$\leqslant C(p,r)\omega_r^s\left(\frac{1}{k},f,A_\mu\right).$$

由（4.27）可得

$$h^{rs}\|R^r P_k\|_{A_\mu}^s \leqslant 2\|\Delta_h^r P_k\|_{A_\mu}^s \leqslant 2C\omega_r^s\left(\frac{1}{k},f,A_\mu\right) \qquad (4.28)$$

则（4.28）及 Jackson 定理可推出

$$K(t^r,f,A_\mu) \leqslant \|f-P_k\|_{A_\mu}+t^r\|R^r P_k\|_{A_\mu}$$

$$\leqslant \|f-P_k\|_{A_\mu}+k^{-r}\|R^r P_k\|_{A_\mu}$$

$$\leqslant C(\omega_r(\frac{1}{k},f,A_\mu)+|h|^r\|R^r P_k\|_{A_\mu})$$

$$\leqslant C\omega_r(\frac{1}{k},f,A_\mu)$$

$$\leqslant C\omega_r(t,f,A_\mu).$$

故

$$K(t^r,f,A_\mu)\simeq\omega_r(t,f,A_\mu).$$

现定义另一种 K－泛函：

$$\widetilde{K}(f,t^r,A_\mu):=\inf_{P\in P_n}\{\|f-P\|_{A_\mu}+t^r\|R^r P\|_{A_\mu},n=[1/t]\}.$$

先得到与定理 A 相类似结果.

定理 4.5.5　对 $f\in A_\mu$，$0<t\leqslant 1$，有

$$\widetilde{K}(f,t^r,A_\mu)\simeq\omega_r(t,f,A_\mu).$$

证明：由光滑模性质（c）易知：对任 $P\in P_n$，

$$\begin{aligned}\omega_r(t,f,A_\mu)&\leqslant C(\omega_r(t,f-P,A_\mu)+\omega_r(t,P,A_\mu))\\&\leqslant C(\|f-P\|_{A_\mu}+t^r\|R^rP\|_{A_\mu}).\end{aligned}$$

因为左边与 P 无关，故两边取 inf 可得

$$\omega_r(t,f,A_\mu)\leqslant C\widetilde{K}(f,t^r;A_\mu).$$

下证不等式另一方向.

令 $n=[1/t]$，则易知 $n\leqslant[1/t]<n+1$. 对任 g 满足 $R^rg\in A_\mu$ 有

$$\begin{aligned}&\|f-P_n[g]\|_{A_\mu}+t^r\|R^rP_n[g]\|_{A_\mu}\\\leqslant{}&C(\|f-g\|_{A_\mu}+\|g-P_n[g]\|_{A_\mu}+t^r\|R^r(g-Pn[g])\|_{A_\mu}+t^r\|R^rg\|_{A_\mu}).\end{aligned}$$

因为 $R^rP_n[g]=P_n[R^rg]$，由 Jackson 定理可得

$$\|g-P_n[g]\|_{A_\mu}\leqslant C\omega_r(1/n,g,A_\mu)\leqslant Ct^r\|R^rg\|_{A_\mu},$$

及

$$\|R^r(g-P_n[g])\|_{A_\mu}\leqslant C\|R^rg\|_{A_\mu}.$$

综上可得

$$\|f-P_n[g]\|_{A_\mu}+t^r\|R^rP_n[g]\|_{A_\mu}\leqslant C(\|f-g\|_{A_\mu}+t^r\|R^rg\|_{A_\mu}).$$

因为 P_n $[g]$ 为次数不超过 n 的多项式，故在上式左边先取 inf 后在右边取 inf，可得

$$\inf_{P\in P_n}\{\|f-P\|_{A_\mu}+t^r\|R^rP\|_{A_\mu}\}\leqslant C\inf_{R^rg\in A_\mu}\{\|f-g\|_{A_\mu}+t^r\|R^rg\|_{A_\mu}\}.$$

再由定理 4.5.4 可得

$$\widetilde{K}(f,t^r;A_\mu)\leqslant CK(f,t^r;A_\mu)\leqslant C\omega_r(t,f,A_\mu).$$

定理得证.

注：利用定理 4.5.5 和光滑模的性质，易得出强化的 Bernstein 不等式

$$\|R^rP_n\|_{A_\mu}\leqslant Cn^r\|P_n\|_{A_\mu}.$$

定理 4.5.6 对任一多项式 $P\in P_n$，n，$r\in\mathrm{N}$，有

$$\|R^rP\|_{A_\mu}\simeq n^r\omega_r(1/n,P,A_\mu).$$

证明：由光滑模性质（c）易知

$$n^r\omega_r(1/n,P,A_\mu)\leqslant C\|R^rP\|_{A_\mu}.$$

下证另一方向. 由 Bernstein 不等式（即定理 3.3.1）得对任多项式 Q_n

$\in P_n$,

$$\| R^r P \|_{A_\mu} \leqslant \| R^r (P - Q_n) \|_{A_\mu} + \| R^r Q_n \|_{A_\mu}$$
$$\leqslant C n^r (\| P - Q_n \|_{A_\mu} + n^{-r} \| R^r Q_n \|_{A_\mu}$$

再由定理 4.5.5，得证.

定理 4.5.7　设 $f \in A_\mu$，$0 < t \leqslant 1$. 若 P 为次数不超过 $[1/t]$ 的多项式且满足 Jackson 不等式

$$\| f - P \|_{A_\mu} \leqslant C \omega_r (t, f, A_\mu), \tag{4.29}$$

则有

$$\omega_r (t, f, A_\mu) \simeq \| f - P \|_{A_\mu} + t^r \| R^r P \|_{A_\mu}.$$

证明：由光滑模的性质（b）（c），易知

$$\omega_r (t, f, A_\mu) \leqslant C(\| f - P \|_{A_\mu} + t^r \| R^r P \|_{A_\mu}).$$

另一方向，由定理 4.5.6 和（4.29）可得

$$\begin{aligned} t^r \| R^r P \|_{A_\mu} &\leqslant C \omega_r (t, P, A_\mu) \\ &\leqslant C(\omega_r (t, P - f, A_\mu) + \omega_r (t, f, A_\mu)) \\ &\leqslant C(\| P - f \|_{A_\mu} + \omega_r (t, f, A_\mu)) \\ &\leqslant C \omega_r (t, f, A_\mu). \end{aligned}$$

等价刻画．

相对于 Hardy 空间，Bergman 型空间中的函数没有边界值．然而，我们可以通过连续模引入 Bergman 型空间中的 Hölder 函数类．所以，Bergman 型空间中的连续模被认为是替代了 Hardy 空间的边界值．对于高维全纯函数空间中的连续模的性质，可参考[42,44]．我们将看到：定理 5. 1. 1 关于 Hardy 空间的结果可视为 Bergman 型空间结果的极限情形（见定理 5. 5. 2）．

用 Ω 表示 C^n 中的具有标准 Harish－Chandera 实现的有界对称域．令 S 为 Ω 的 Shilov 边界且具有规范化的 Lebesgue 测度 σ，即满足 $\sigma(S)=1$．

用 φ 表示正规函数．以后，a，b，和 r_0 为正规函数 φ 定义中的相关常数．

用 $H(\Omega)$ 表示 Ω 上的全纯函数全体．对任 $f\in H(\Omega)$，我们记

$$f_r(z)=f(rz),\quad f_{e^{ih}}(z)=f(e^{ih}z),$$

和径向导数为

$$Rf(z)=\sum_{i=1}^{n}z_i\frac{\partial f}{\partial z_i}(z).$$

对 $0<p,q\leqslant\infty$，Bergman 型空间 $H_{p,q,\varphi}$ 是由所有满足下列条件的函数 $f\in H(\Omega)$ 构成：

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}}=\|f(z)\|_{H_{p,q,\varphi}}$$
$$:=\left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,f)dr\right)^{1/p}<+\infty,$$

其中

$$M_q(r,f)=\left(\int_S|f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q}.$$

$p=\infty$ 或 $q=\infty$ 理解为极限意义下的情况．

回忆函数 f 的连续模的定义

$$\omega(\delta,f)=\omega(\delta,f,H_{p,q,\varphi}):=\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\|f_{e^{ih}}-f\|_{H_{p,q,\varphi}}.\tag{5.1}$$

设 $0<\alpha\leqslant 1$. 一个函数 $f\in H_{p,q,\varphi}$ 被称为属于 α－Hölder 类当且仅当

$$\omega(\rho,f,H_{p,q,\varphi})=O(\rho^\alpha),\quad\forall\rho\in(0,1).$$

集合 α－Hölder 类可用符号 $\Lambda^\alpha(H_{p,q,\varphi})$ 表示．

我们的主要结果如下：

定理 5. 1. 2　设 $f(z)\in H_{p,q,\varphi}$，$0<p,q\leqslant\infty$，$0<\alpha\leqslant 1$．则

$$f\in\Lambda^{\alpha}(H_{p,q,\varphi})\Longleftrightarrow\|(Rf)_{\rho}\|_{H_{p,q,\varphi}}=O((1-\rho)^{\alpha-1}),\quad \rho\to1^{-}.$$

§5.2 Bergman 型空间与径向导数

本节将给出关于正规函数，Bergman 型空间和径向导数的一些基本结果.

引理 5.2.1[26] 对任 $0\leqslant t\leqslant r<1$ 和 $s>0$，有 $\varphi(r)\simeq\varphi(r^{s})$ 和

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{a}}\lesssim\frac{\varphi(t)}{(1-t)^{a}},\ \frac{\varphi(r)}{(1-r)^{b}}\gtrsim\frac{\varphi(t)}{(1-t)^{b}}.$$

有了这个引理，在使用时，通常可以取 r_0 为零.

在 Ω 上，结合 Bergman 型空间的模，我们考虑

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}[o,\rho)}:=\left(\int_{0}^{\rho}r^{2n-1}(1-r)^{-1}\varphi^{p}(r)M_{q}^{p}(r,f)dr\right)^{1/p}.\quad(5.2)$$

显然，

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}}=\|f\|_{H_{p,q,\varphi[0,1)}}.$$

对于 $0<p<\infty$，式（5.2）中的权我们有时记为

$$\Phi(r)=\Phi_{p}(r):=r^{2n-1}(1-r)^{-1}\varphi^{p}(r).\quad(5.3)$$

引理 5.2.2 设 $0<p$，$q\leqslant+\infty$，$f\in H_{p,q,\varphi}$. 则

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}[0,1/4)}\lesssim\|f\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1/2)}.\quad(5.4)$$

证明：我们断言，对 $0<p<\infty$，

$$\Phi(r)\lesssim\Phi(r+1/4),\quad r\in[0,1/4].\quad(5.5)$$

事实上，由函数 r^{2n-1} 和 $((1-r)^{-b}\varphi(r))^{p}$ 的单调性，当 $\Phi(r)=(1-r)^{pb-1}$ 时，上式是成立的．在这种情况下，两个函数都与非零常数是等价的.

因此，当 $0<q<\infty$ 时，考虑到 $M_q(r,f)$ 的单调性，（5.4）可由（5.5）得到．情况 $q=\infty$ 可由最大模原理直接得到.

引理 5.2.3 设 $f\in H(\Omega)$，$0<pb\leqslant1$，$0<q\leqslant+\infty$，及 $0<r\leqslant R<1$. 则

$$\|f\|_{H_{p,q,\varphi}[0,r)}\lesssim\|f\|_{H_{p,q,\varphi}[R/2,(R+r)/2)}.\quad(5.6)$$

证明：因为 $0<pb\leqslant1$，和（5.5）一样，$(1-r)^{pb-1}$ 是单增的及

$$\Phi(r)\lesssim\Phi(R),\quad\forall\,0<r\leqslant R<1.\quad(5.7)$$

取变量代换 $\rho=\dfrac{R+t}{2}$，得

$$\| f \|^p_{H_{p,q,\varphi}[R/2,(R+r)/2)} = \int_{\frac{R}{2}}^{\frac{R+r}{2}} \Phi(\rho) M_q^p(\rho, f) d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r \Phi\left(\frac{R+t}{2}\right) M_q^p(\frac{R+t}{2}, f) dt$$

$$\gtrsim \int_0^r \Phi(t) M_q^p(t, f) dt = \| f(z) \|^p_{H_{p,q,\varphi}[0,r)}.$$

引理 5.2.4　设 $0 \leqslant \rho \leqslant r < 1$. 则

$$\Phi(\rho) \lesssim \Phi(\rho + \frac{1-r}{2}). \tag{5.8}$$

证明：这可直接由下式得到，

$$1-(\rho+\frac{1-r}{2}) \leqslant 1-\rho \leqslant 2\left(1-(\rho+\frac{1-r}{2})\right).$$

引理 5.2.5　设$\frac{1}{4} \leqslant \rho < r \leqslant 1$，$\theta \in [-\pi,\pi]$. 则

(ⅰ) $\left|(\rho+\frac{1-r}{2})e^{i\theta}-\rho\right|^2 \geqslant \frac{1}{4\pi^2}((1-r)^2+\theta^2)$；

(ⅱ) $|1-re^{i\theta}|^2 \geqslant \frac{1}{\pi^2}((1-r)^2+\theta^2)$.

证明：记 $\rho_1 = \rho + \frac{1-r}{2}$. 注意到

$$|\rho_1 e^{i\theta} - \rho|^2 = (\rho_1 - \rho)^2 + 4\rho_1 \rho \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

是关于 θ 的偶函数．这样不妨假设 $\theta \in [0,\pi]$，所以（ⅰ）可直接由不等式

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta, \qquad \forall\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

得到．情况(ⅱ)类似可证．

引理 5.2.6[23]　设 $0 < p \leqslant 1$，$0 < r < 1$，和 g 在闭单位圆盘 $\overline{U}$ 上全纯．则

$$\left(\int_{[-\pi,\pi)} |g(re^{i\theta})| d\theta\right)^p \lesssim (1-r)^{p-1} \int_{[-\pi,\pi)} |g(e^{i\theta})|^p d\theta \quad . \tag{5.9}$$

引理 5.2.7　设 $\lambda > 0$，$\delta > 0$，和 $s = \min\{1, p, q\}$．若 $f(z) \in H_{p,q,\varphi}(\Omega)$，则

$$\omega^s(\lambda\delta, f, H_{p,q,\varphi}) \leqslant (\lambda+1)\omega^s(\delta, f, H_{p,q,\varphi}) \quad . \tag{5.10}$$

证明：文[42]中引理 3.3 证明了特殊情况 $\varphi(r)=(1-r)^{\alpha}$，其中 $\alpha>0$. 其证明同样适用于广义的正规函数 φ.

在[55]中，Hua 构造了全纯齐次多项式集合

$$\left\{\varphi_{j,v}: j\in \mathrm{N}\cup\{0\}, v=1,\cdots,m_j=\frac{(n+j-1)!}{(j!(n-1)!)}\right\}$$

其在 $H(\Omega)\cap L^2(\Omega)$ 完备且在 Ω 和 S 上是正交的．每个函数 $f\in H(\Omega)$ 都具有级数展开（参见[56]）：

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{v=1}^{m_j}a_{j,v}\varphi_{j,v}(z), \tag{5.11}$$

其在 Ω 的紧子集上是收敛的，且系数是由公式

$$a_{j,v}=\lim_{r\to 1-}\int_s f(r\xi)\overline{\varphi_{j,v}(\xi)}d\sigma(\xi)$$

给出．

对任意 $\beta>0$ 和 $s\geqslant 0$，我们引入分式径向导数 $R^{\beta,s}$（参见[26]）：

$$(R^{\beta,s}f)(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{v=1}^{m_j}(j+s)^{\beta}a_{j,v}\varphi_{j,v}(z).$$

引理 5.2.8　设 $0<p$，$q\leqslant\infty$，$\beta>0$，$s>0$，$u\geqslant 0$，且 φ 为正规的．则对任意 $f\in H(\Omega)$，

$$\int_0^1 r^u(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,f)dr\simeq\int_0^1 r^u(1-r)^{p\beta-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,R^{\beta,s}f)dr. \tag{5.12}$$

当 $p=\infty$ 时，不等式可理解为其极限的情况：当 $r\to 1^{-1}$ 时，

$$M_q(r,f)=O(\varphi^{-1}(r))\Leftrightarrow M_q(r,R^{\beta,s}f)=O((1-r)^{-\beta}\varphi^{-1}(r)).$$

证明：当 $u=0$ 时，在[26]中结果已被证明．一般的情况可由不等式得到

$$\int_0^1 r^u(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,f)dr\simeq\int_0^1(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,f)dr.$$

不等式的一个方向很显然，另一个方向可由变量代换 $t=r^{u+1}$ 得到．

引理 5.2.9　设 $0<p$，$q\leqslant\infty$，$s>0$，$\beta>0$. 若 φ 为正规函数，$\psi(r)=(1-r)^{\beta}\varphi(r)$．则

$$\omega(\delta,f,H_{p,q,\varphi})\simeq\omega(\delta,R^{\beta,s}f,H_{p,q,\psi}),\quad\forall f\in H(\Omega). \tag{5.13}$$

证明：由定义，

$$\begin{aligned}\Delta_h(R^{\beta,s}f(z)) &= R^{\beta,s}f(e^{ih}z)-R^{\beta,s}f(z)\\ &= R^{\beta,s}(f(e^{ih}z)-f(z))\\ &= R^{\beta,s}(\Delta_h f(z)).\end{aligned}$$

所以由引理 5.2.8 可得

$$\begin{aligned}\omega(\delta,f,H_{p,q,\varphi}) &= \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,\Delta_h f)dr\right)^{1/p}\\ &\simeq \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{p\beta-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,R^{\beta,s}(\Delta_h f))dr\right)^{1/p}\\ &= \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{p\beta-1}\varphi^p(r)M_q^p(r,\Delta_h(R^{\beta,s}f))dr\right)^{1/p}\\ &= \omega(\delta,R^{\beta,s}f,H_{p,q,\psi}).\end{aligned}$$

我们将使用 Hardy 空间中的 Hardy—Littlewood 极大定理.

引理 5.2.10[57]　设 $f\in H^p(U)$，$0<p\leqslant\infty$，

$$F(\theta):=\sup_{0<r<1}|f(re^{i\theta})|.$$

则 $F\in L^p([0,2\pi])$ 且

$$\|F\|_{L^p([0,2\pi])}\leqslant C(p)\|f\|_{H^p(U)}.$$

§5.3　Hardy—Littlewood 型正定理

Hardy—Littlewood 正定理给出了径向导数 Rf 利用 f 连续模的估计.

定理 5.3.1　设 $0<p,q\leqslant\infty$，$f(z)\in H_{p,q,\varphi}$. 则

$$\|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,\rho)}\lesssim\frac{\omega(1-\rho,H_{p,q,\varphi})}{1-\rho},\quad\forall\rho\in(0,1)\quad. \tag{5.14}$$

证明：令 $f\in H(\Omega)$，记 $f_\zeta(\lambda)=f(\lambda\zeta)$，其中 $\lambda\in U$ 和 $\zeta\in S$，则 $f_\zeta\in H(U)$. 令

$$1/4\leqslant\rho<r<1,$$

并取 $\rho_1=\rho+\frac{1-r}{2}$，$\rho_2=\rho+\frac{1-r}{4}$. 则 $1/4\leqslant\rho<\rho_2<\rho_1<1$.

对任固定 $\gamma>0$，我们考虑全纯函数

$$g(\lambda):=\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\lambda)}{(\rho_1-r\lambda)\gamma},\quad\forall|\lambda|\leqslant\rho_1\quad. \tag{5.15}$$

由 Cauchy 公式，可知

$$\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\lambda)}{(\rho_1-r\lambda)^\gamma}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\omega|=\rho 2}\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\omega)}{(\omega-\lambda)(\rho_1-r\omega)^\gamma}d\omega,\ \forall\ |\lambda|<\rho_2\,.$$

特别地，取 $\lambda=\rho$，有

$$\begin{aligned}\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho)}{(\rho_1-r\rho)^\gamma}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho_2}\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(w)}{(w-\rho)(\rho_1-rw)^\gamma}dw\\&=\frac{\rho_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho_2e^{i\theta}))e^{i\theta}}{(\rho_2e^{i\theta}-\rho)(\rho_1-r\rho_2e^{i\theta})^\lambda}d\theta.\end{aligned}$$

所以

$$|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho)|\leqslant\frac{\rho_2(\rho_1-r\rho)^\gamma}{2\pi(\rho_2-\rho)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho_2e^{i\theta})|}{|\rho_1-r\rho_2e^{i\theta}|^\gamma}d\theta\,. \quad (5.16)$$

因为（5.15）中的 g（λ）在 $|\lambda|\leqslant\rho_1$ 上全纯，可知

$$h(\lambda):=g(\rho_1\lambda)=\frac{f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho_1\lambda)}{(\rho_1-r\rho_1\lambda)^\gamma},\lambda\in U$$

全纯．所以由引理 5.2.6 得：对任 $0<t$，$\eta\leqslant1$，

$$\left(\int_{[-\pi,\pi)}|h(te^{i\theta})|d\theta\right)^\eta\lesssim(1-t)^{\eta-1}\int_{[-\pi,\pi)}|h(e^{i\theta})|^\eta d\theta.$$

取 $t=\rho_2/\rho_1$，则

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho_2e^{i\theta})|}{|\rho_1-r\rho_2e^{i\theta}|^\gamma}d\theta\right)^\eta\lesssim$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\right)^{1-\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho_1e^{i\theta})|^\eta}{|\rho_1-r\rho_1e^{i\theta}|^{\gamma\eta}}d\theta\,.$$

把上式代入（5.16）中，我们得到

$$|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho)|^\eta\leqslant$$

$$\left(\frac{\rho_2}{2\pi}\right)^\eta\frac{(\rho_1-r\rho)^{\gamma\eta}}{(\rho_2-\rho)^\eta}\left(\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\right)^{1-\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1e^{i\theta})-f_\zeta(\rho_1)|^\eta}{|\rho_1-r\rho_1e^{i\theta}|^{\gamma\eta}}d\theta.$$

现在我们取参数 $\gamma=4/\eta$. 因为 $1/4<\rho_2<\rho_1<1$, $\rho_1-\rho_2=\rho_2-\rho=(1-r)/4$, 和

$$\rho_1-r\rho=(1-r)(\frac{1}{2}+\rho)\leqslant\frac{3}{2}(1-r),$$

故对任 $1/4\leqslant\rho<r<1$ 和 $\rho_1=\rho+\dfrac{1-r}{2}$，有

$$|f_\zeta(\rho_1)-f_\zeta(\rho)|^\eta \lesssim (1-r)^3\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1 e^{i\theta})-f_\zeta(\rho_1)|^\eta}{|1-re^{i\theta}|^4}d\theta \ . \tag{5.17}$$

现在，我们将 Cauchy 公式应用于全纯函数

$$g_1(\lambda):=\frac{f_\zeta(\lambda)}{(\rho_1-r\lambda)^\gamma},\quad \forall\,|\lambda|\leqslant\rho_1 \tag{5.18}$$

得到

$$\frac{f_\zeta(\lambda)}{(\rho_1-r\lambda)^\gamma}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho_2}\frac{f_\zeta(w)}{(w-\lambda)(\rho_1-rw)^\gamma}dw,\quad \forall\,|\lambda|<\rho_2\ . \tag{5.19}$$

对（5.19）两侧取导数并注意到

$$f'_\zeta(\lambda)=\frac{Rf(\lambda\zeta)}{\lambda}$$

我们得到，对任意 $|\lambda|<\rho_2$，

$$\frac{Rf(\lambda\zeta)}{\lambda(\rho_1-r\lambda)^\gamma}+\frac{\gamma rf_\zeta(\lambda)}{(\rho_1-r\lambda)^{\gamma+1}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho_2}\frac{f_\zeta(w)}{(w-\lambda)^2(\rho_1-rw)^\gamma}dw\ . \tag{5.20}$$

取 $\lambda=\rho$，有

$$\frac{Rf(\rho\zeta)}{\rho(\rho_1-r\rho)^\gamma}+\frac{\gamma rf_\zeta(\rho)}{(\rho_1-r\rho)^{\gamma+1}}=\frac{\rho_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\zeta(\rho_2 e^{i\theta})e^{i\theta}}{(\rho_2 e^{i\theta}-\rho)^2(\rho_1-r\rho_2 e^{i\theta})^\gamma}d\theta\ . \tag{5.21}$$

特别地，令 $f\equiv1$，得到

$$\frac{\gamma r}{(\rho_1-r\rho)^{\gamma+1}}=\frac{\rho_2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}}{(\rho_2 e^{i\theta}-\rho)^2(\rho_1-r\rho_2 e^{i\theta})^\gamma}d\theta\ . \tag{5.22}$$

我们用（5.21）减去（5.22）的适当倍数，从而得到

$$Rf(\rho\zeta)=\frac{\rho\rho_2(\rho_1-r\rho)^\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(f_\zeta(\rho_2 e^{i\theta})-f_\zeta(\rho))e^{i\theta}}{(\rho_2 e^{i\theta}-\rho)^2(\rho_1-r\rho_2 e^{i\theta})^\gamma}d\theta,$$

所以

$$|Rf(\rho\zeta)|\leqslant\frac{\rho\rho_2(\rho_1-r\rho)^\gamma}{2\pi(\rho_2-\rho)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_2 e^{i\theta})-f_\zeta(\rho)|}{|\rho_1-r\rho_2 e^{i\theta}|^\gamma}d\theta.$$

再由引理 5.2.6，对任意 $0<\eta\leqslant1$，有

$$\begin{aligned}&|Rf(\rho\zeta)|^\eta\\ \lesssim&\left(\frac{\rho\rho_2(\rho_1-r\rho)^\gamma}{2\pi(\rho_2-\rho)^2}\right)^\eta\left(\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\right)^{1-\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_\zeta(\rho_1 e^{i\theta})-f_\zeta(\rho)|^\eta}{|\rho_1-r\rho_2 e^{i\theta}|^{\gamma\eta}}d\theta.\end{aligned}$$

通过选择合适的参数，我们知道 $1/4\leqslant\rho<\rho_2<\rho_1<1$，

$$\rho_2-\rho\simeq1-r,\quad \rho_1-\rho_2\simeq1-r,\quad \rho_1-r\rho\leqslant\frac{3}{2}(1-r).$$

所以，对任意 $1/4\leqslant\rho<r<1$ 和 $\rho_1=\rho+\dfrac{1-r}{2}$，

$$|Rf(\rho\zeta)|^{\eta}\lesssim(1-r)^{3-\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho)|^{\eta}}{|1-re^{i\theta}|^{4}}d\theta\quad. \tag{5.23}$$

由引理 5.2.5，注意到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{4}}\lesssim\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{((1-r)^{2}+\theta^{2})^{2}}$$

$$=\frac{2}{(1-r)^{3}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d(\frac{\theta}{1-r})}{(1+(\frac{\theta}{1-r})^{2})^{2}}\lesssim\frac{1}{(1-r)^{3}}.$$

由于 $|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho)|^{\eta}\leqslant|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho_1)|^{\eta}+|f_{\zeta}(\rho_1)-f_{\zeta}(\rho)|^{\eta}$，从 (5.23) 和 (5.17) 得到

$$|Rf(\rho\zeta)|^{\eta}\lesssim(1-r)^{3-\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho_1)|^{\eta}}{|1-re^{i\theta}|^{4}}d\theta.$$

我们用 $s=\min\{1,p,q\}$ 替换 η 得到：对任意 $1/4\leqslant\rho<r<1$ 和 $\rho_1=\rho+\dfrac{1-r}{2}$，

$$|Rf(\rho\zeta)|^{s}\lesssim(1-r)^{3-S}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho_1)|^{s}}{|1-re^{i\theta}|^{4}}d\theta\quad. \tag{5.24}$$

现在我们取 q/s 次方，在 S 上积分，并利用 Minkowski 不等式，得到

$$M_q^s(\rho,Rf)\lesssim(1-r)^{3-s}\left(\int_S\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f_{\zeta}(\rho_1e^{i\theta})-f_{\zeta}(\rho_1)|^{s}}{|1-re^{i\theta}|^{4}}d\theta\right)^{q/s}d\sigma(\zeta)\right)^{s/q}$$

$$\leqslant(1-r)^{3-s}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_S|f(\rho_1e^{i\theta}\zeta)-f(\rho_1\zeta)|^{q}d\sigma(\zeta)\right)^{s/q}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{4}}.$$

再次取 p/s 次方，在 $[1/4,r)$ 上积分，及像引理 5.2.4 那样利用 Minkowski 不等式．我们得到

$$\left(\int_{\frac{1}{4}}^{r}\Phi(\rho)M_q^p(\rho,Rf)d\rho\right)^{s/p}$$

$$\lesssim(1-r)^{3-s}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{r}\Phi(\rho)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{M_q^s(\rho_1,f_{e^{i\theta}}-f)d\theta)}{|1-re^{i\theta}|^{4}}\right)^{p/s}d\rho\right)^{s/p}$$

$$\lesssim(1-r)^{3-s}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{0}^{1}\Phi(\rho_1)M_q^p(\rho_1,f_{e^{i\theta}}-f)d\rho\right)^{s/q}\frac{d\theta}{|1-re^{i\theta}|^{4}}.$$

因此，由引理 5.2.7，

$$\|Rf\|^s_{H_{p,q,\varphi}[1/4,r)} \lesssim (1-r)^{3-s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^s(|\theta|,f,H_{p,q,\varphi})}{|1-re^{i\theta}|^4}d\theta$$

$$\lesssim (1-r)^{3-s}\omega^s(1-r,f,H_{p,q,\varphi})\int_0^{\pi}\frac{\frac{\theta}{1-r}+1}{|1-re^{i\theta}|^4}d\theta$$

$$\lesssim \frac{\omega^s(1-r,f,H_{p,q,\varphi})}{(1-r)^s}.$$

即

$$\|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,r)} \lesssim \frac{\omega(1-r,f,H_{p,q,\varphi})}{(1-r)},\quad \forall 1/4<r<1. \tag{5.25}$$

（ⅰ）情况 $pb>1$

若 $r\geqslant 1/2$，则由引理 5.2.2 和（5.25）得到，

$$\|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,r)} \lesssim \|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,1/4)} + \|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,r)}$$

$$\lesssim \|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,r)} \lesssim \frac{\omega(1-r,f,H_{p,q,\varphi})}{1-r}. \tag{5.26}$$

若 $r<1/2$，则 $1-r\simeq 1$. 用（5.26）中 r=1/2 的情况和引理 5.2.7，

$$\|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,r)} \leqslant \|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,1/2)}$$

$$\lesssim \frac{\omega(1/2,f,H_{p,q,\varphi})}{1/2}$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{2(1-r)}+1\right)^{1/s}\omega(1-r,f,H_{p,q,\varphi})$$

$$\lesssim \frac{\omega(1-r,f,H_{p,q,\varphi})}{1-r}.$$

（ⅱ）情况 $0<pb\leqslant 1$

由引理 5.2.3，引理 5.2.7 和（5.25），我们得到

$$\|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[0,r)} \lesssim \|Rf\|_{H_{p,q,\varphi}[\frac{1}{2},\frac{1+r}{2})}$$

$$\lesssim \frac{\omega(1-\frac{1+r}{2},f,H_{p,q,\varphi})}{1-\frac{1+r}{2}}$$

$$= \frac{2\omega((1-r)/2,f,H_{p,q,\varphi})}{1-r}$$

$$\lesssim \frac{\omega(1-r,\ f,\ H_{p,q,\varphi})}{1-r}.$$

定理 5.3.2 设 $0<p$，$q\leqslant+\infty$，$f(z)\in H_{p,q,\varphi}(\Omega)$．则

$$\|(Rf)_r\|_{H_{p,q,\varphi}}\lesssim\frac{\omega(1-r,\ f,\ H_{p,q,\varphi})}{1-r},\forall\, 0<r<1\ . \tag{5.27}$$

证明：我们分几种情况证明．记

$$N_{p,q,\varphi}(r,\ f)=\|f_r\|_{H_{p,q,\varphi}}.$$

（ⅰ）情况 $p\geqslant 1/a$

由引理 5.2.1，

$$\begin{aligned}N_{p,q,\varphi}(r,\ f)&=\left(\int_0^1\rho^{2n-1}\frac{\varphi^p(\rho)}{1-\rho}\left(\int_S|f(r\rho\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{p/q}d\rho\right)^{1/p}\\&=\left[\int_0^r\frac{1}{r}\left(\frac{t}{r}\right)^{2n-1}\frac{\varphi^p(\frac{t}{r})}{1-\frac{t}{r}}\left(\int_S|f(t\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{p/q}dt\right]^{1/p}\\&\lesssim\left(\frac{1}{r^{2n}}\right)^{1/p}\left(\int_0^r t^{2n-1}\frac{\varphi^p(t)}{1-t}\left(\int_S|f(t\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{p/q}dt\right)^{1/p}\\&\lesssim\left(\frac{1}{r^{2n}}\right)^{1/p}\|f(z)\|_{H_{p,q,\varphi}[0,r)}\end{aligned}$$

所以，由定理 5.3.1，

$$N_{p,q,\varphi}(r,Rf)\lesssim\left(\frac{1}{r^{2n}}\right)^{1/p}\frac{\omega(1-r,\ f,\ H_{p,q,\varphi})}{1-r} \tag{5.28}$$

（A）当 $r\geqslant\frac{1}{2}$时，由（5.28）得到

$$N_{p,q,\varphi}(r,\ Rf)\lesssim\frac{\omega(1-r,\ f,\ H_{p,q,\varphi})}{1-r} \tag{5.29}$$

（B）当 $r<\frac{1}{2}$时，有 $1-r\simeq 1$．因此由（5.29）和引理 5.2.7 可得

$$\begin{aligned}N_{p,q,\varphi}(r,Rf)&\leqslant N_{p,q,\varphi}\left(\frac{1}{2},Rf\right)\\&\lesssim\omega\left(\frac{1}{2},\ f,\ H_{p,q,\varphi}\right)\\&\leqslant\left(\frac{1}{2(1-r)}+1\right)^{1/s}\omega(1-r,\ f,\ H_{p,q,\varphi})\end{aligned}$$

$$\lesssim \frac{\omega(1-r, f, H_{p,q,\varphi})}{1-r}.$$

（ⅱ）情况 $0<p<\frac{1}{a}$

取 β 使得 $\beta \geqslant \frac{1}{p}-a>0$．令 $s>0$，$\psi(\rho)=(1-\rho)^{\beta}\varphi(\rho)$．由引理 5.2.8 和引理 5.2.9，

$$\begin{aligned} N_{p,q,\varphi}(r, f) &= \left(\int_0^1 \rho^{2n-1}(1-\rho)^{-1}\varphi^p(\rho)\left(\int_S |f(r\rho\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{p}{q}} d\rho\right)^{1/p} \\ &\simeq \left(\int_0^1 \rho^{2n-1}(1-\rho)^{p\beta-1}\varphi^p(\rho)\left(\int_S |R^{\beta,s} f(r\rho\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{p}{q}} d\rho\right)^{1/p} \\ &\lesssim \frac{1}{r^{\frac{2n}{p}}}\| R^{\beta,s} f \|_{H_{p,q,\psi}(|z|<r)}. \end{aligned}$$

与情况（ⅰ）同理，可得

$$N_{p,q,\varphi}(r, f) \lesssim \frac{\omega(1-r, R^{\beta,s} f, H_{p,q,\psi})}{1-r}$$

或，由（5.13），

$$N_{p,q,\varphi}(r, f) \lesssim \frac{\omega(1-r, f, H_{p,q,\psi})}{1-r}.$$

定理得证．

§5.4　Hardy—Littlewood 型逆定理

Hardy—Littlewood 逆定理给出利用函数 f 径向导数增长来刻画其光滑模的估计．引理 5.4.1　设 $f(z)\in H(\Omega)$，$0<h<r<1$.

（ⅰ）若 $q\geqslant 1$，则

$$\left(\int_S |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q} \lesssim \int_0^h \left(\int_S \left|\frac{Rf((r-t)\zeta)}{r-t}\right|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q} dt;$$

（ⅱ）若 $0<q<1$，则

$$\int_S |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \lesssim$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}\int_S\left|\frac{Rf((r-h+t)\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta)dt.$$

证明：（ⅰ）因为 f_ζ（λ）$=f$（$\lambda\zeta$）是全纯的，我们有

$$\begin{aligned}f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)&=f_\zeta(r)-f_\zeta(r-h)\\&=-\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}(f_\zeta(r-t))dt=\int_0^h\frac{Rf((r-t)\zeta)}{r-t}dt,\end{aligned}$$

再由 Minkowski 不等式（$q\geqslant1$）得到

$$\begin{aligned}&\left(\int_S|f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q}\\&\leqslant\left[\int_S\left(\int_0^h\left|\frac{Rf((r-t)\zeta)}{r-t}\right|dt\right)^q d\sigma(\zeta)\right]^{1/q}\\&\leqslant\int_0^h\left(\int_S\left|\frac{Rf((r-t)\zeta)}{r-t}\right|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q}dt.\end{aligned}$$

（ⅱ）对 $0<q<1$，令 $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为区间 $[0,h)$ 的一个划分，即，

$$0=h_0<h_1<\cdots<h_k<\cdots\to h,\quad(k\to\infty).$$

则

$$\begin{aligned}&|f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q\\&=|f_\zeta(r)-f_\zeta(r-h)|^q\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|f_\zeta(r-h+h_k)-f_\zeta(r-h+h_{k+1})|^q\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{h_k}^{h_{k+1}}|f'(r-h+t)|dt\right)^q\\&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(h_{k+1}-h_k)^q\sup_{h_k<t<h_{k+1}}|f'_\zeta(r-h+t)|^q.\end{aligned}$$

对于 S 上的积分的估计，我们利用恒等式（参见[4]）

$$\int_S fd\sigma=\int_S d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta}\zeta)d\theta \tag{5.30}$$

和 Hardy—Littlewood 极大定理（引理 5.2.10）. 我们有

$$\begin{aligned}&\int_S\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sup_{h_k<t<h_{k+1}}\left|\frac{\partial f_\zeta}{\partial t}((r-h+t)e^{i\theta})\right|^q d\theta d\sigma(\zeta)\\&\lesssim\int_S\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial f_\zeta}{\partial t}((r-h+h_{k+1})e^{i\theta})\right|^q d\theta d\sigma(\zeta)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0 \left|\frac{Rf((r-h+h_{k+1})e^{i\theta}\zeta)}{r-h+h_{k+1}}\right|^q d\sigma(\zeta)d\theta$$

$$\leqslant \int_S \left|\frac{Rf((r-h+h_{k+1})\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta).$$

因此，对于 $0<q<1$，

$$\int_S |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}(h_{k+1}-h_k)^q\int_S \left|\frac{Rf((r-h+h_{k+1})\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta) \quad . \qquad (5.31)$$

现在令

$$h_k=\left(1-\frac{1}{2^k}\right)h, \qquad k=0, 1, 2, \cdots$$

则

$$(h_{k+1}-h_k)^q = 2(h_{k+2}-h_{k+1})(h-h_{k+1})^{q-1}.$$

注意到 $(h-t)^{q-1}$ （$0<q<1$） 和

$$\int_S |Rf((r-h+t)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)$$

均为区间［0，h］上关于 t 的非负函数．进一步估计（5.31）的左侧，得到

$$\int_S |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}(h_{k+2}-h_{k+1})(h-h_{k+1})^{q-1}\int_S \left|\frac{Rf((r-h+h_{k+1})\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta)$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{\infty}\int_{h_{k+1}}^{h_{k+2}}(h-t)^{q-1}dt\int_S \left|\frac{Rf((r-h+h_{k+1})\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta)$$

$$\leqslant \int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}\int_S \left|\frac{Rf((r-h+t)\zeta)}{r-h}\right|^q d\sigma(\zeta)dt.$$

引理得证．

引理 5.4.2　设 $f(z)\in H(\Omega)$，$q>0$，$0<r<1$．则

$$\int_S |f(re^{ih}\zeta)-f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \lesssim |h|^q\int_S |Rf(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \quad . \qquad (5.32)$$

证明：注意到

$$f(re^{ih}\zeta)-f(r\zeta) = f_\zeta(re^{ih})-f_\zeta(r)$$

$$= \int_0^h \frac{\partial}{\partial\theta}(f_\zeta(re^{i\theta}))d\theta = i\int_0^h (Rf)(re^{i\theta}\zeta)d\theta.$$

当 $q\geqslant 1$ 时，由 Minkowski 不等式知

$$\int_S |f(re^{ih}\zeta) - f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \leqslant \left(\int_0^h \left(\int_S |Rf(re^{i\theta}\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q} d\theta\right)^q$$

$$= |h|^q \int_S |Rf(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta),$$

其中最后一步用到了测度 $d\sigma$ 的旋转不变性.

当 $0<q<1$ 时，我们知道（参见[21]）：对任 $F(z) \in H(\overline{\mathrm{U}})$，

$$\int_0^{2\pi} |F(e^{i(\theta+h)}) - F(e^{i\theta})|^q d\theta \lesssim |h|^q \int_0^{2\pi} |F'(e^{i\theta})|^q d\theta \quad . \qquad (5.33)$$

由（5.33）和(5.30)，有

$$\int_S |f(re^{ih}\zeta) - f(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta)$$

$$= \int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_{r\zeta}(e^{i(h+\theta)}) - f_{r\zeta}(e^{i\theta})|^q d\theta d\sigma(\zeta)$$

$$\lesssim \int_S |h|^q \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial}{\partial\theta}(f_{r\zeta}(e^{i\theta}))\right|^q d\theta d\sigma(\zeta)$$

$$= \int_S |h|^q \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |iRf(re^{i\theta}\zeta)|^q d\theta d\sigma(\zeta)$$

$$= |h|^q \int_S |Rf(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta).$$

定义 5.4.3 （参见[1]）定义在 R^+ 上的函数 $\Omega(t)$ 称为连续模型函数，如果 $\Omega(t)$满足下列性质：

(a) $\Omega(t)\to\Omega(0)=0$，　对 $t\to 0$；

(b) $\Omega(t)$ 在 R^+ 上为非负和不减的；

(c) $\Omega(t)$ 是次可加的：$\Omega(t_1+t_2)\leqslant\Omega(t_1)+\Omega(t_2)$，其中 $t_1, t_2\geqslant 0$.

定理 5.4.4 设 $0<p, q\leqslant\infty$，$\mu=\min\{1, p, q\}$，$\Omega^\mu(t)$ 为一个连续模型函数且满足

$$\int_0^1 \frac{\Omega^\mu(t)}{t}dt < \infty.$$

若 $f(z) \in H_{p,q,\varphi}$而且满足

$$\| (Rf)_\rho \|_{H_{p,q,\varphi}} \lesssim \frac{\Omega(1-\rho)}{1-\rho}, \forall\, 0<\rho<1,$$

则

$$\omega(\tau, f, H_{p,q,\varphi}) \lesssim \left(\int_0^\tau \frac{\Omega^\mu(t)}{t}dt\right)^{1/\mu}, \forall\, 0<\tau<1\ . \qquad (5.34)$$

证明：由引理 5. 2. 2 知

$$\| \Delta_h f \|_{H_{p,q,\varphi}[0,1)} \lesssim \| \Delta_h f \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}. \qquad (5.35)$$

所以，(5. 34) 的证明可简化为

$$\| \Delta_h f \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \lesssim \left(\int_0^\tau \frac{\Omega^\mu(t)}{t}dt\right)^{1/\mu}, \forall\, 0<h<\tau<1\ . \qquad (5.36)$$

情况 I.　$0<q<1$，　$p\geqslant q$

此时 $\mu=\min\{1, p, q\}=q$.

(A) 情况 $p\geqslant 1/a$

(i) 我们首先证明：对 $\tau\in[0, 1/8]$，(5. 36) 成立 . 现在取

$$0<h<\tau\leqslant 1/8, \quad 1/4<r<1\ . \qquad (5.37)$$

记

$$\begin{aligned}\Delta_h f(r\zeta) &= |f(r\zeta e^{ih}) - f(r\zeta)| \\ &\leqslant |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)| + |f((r-h)\zeta)-f((r-h)e^{ih}\zeta)| \\ &\quad + |f(re^{ih}\zeta)-f((r-h)e^{ih}\zeta)| \\ &:= \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3.\end{aligned}$$

则

$$\| \Delta_h f \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \lesssim \sum_{k=1}^{3} \| \Delta_k \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}. \qquad (5.38)$$

首先，我们估计 $\| \Delta_1 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}$.　由 (5. 37) 得到，$r-h>1/8$，故由引理 5. 4. 1 可得

$$\int_S |\Delta_1|^q d\sigma(\zeta) \lesssim \int_{\frac{h}{2}}^{h} (h-t)^{q-1} \int_S |Rf((r-h+t)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)dt.$$

所以，利用 Minkowski 不等式 (p≥q)，有

$$\begin{aligned}&\| \Delta_1 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \\ &\lesssim \left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} \Phi(r)\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}M_q^q(r-h+t, Rf)dt\right)^{p/q}dr\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$\lesssim \left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}\Phi(r)M_q{}^{p}(r-h+t,Rf)dr\right)^{q/p}dt\right)^{1/q}.$$

对任 $t\in(h/2,h)$，其中 h 和 r 取自（5.37），利用变量代换

$$r-h+t=(1-h+t)\rho,$$

则

$$r=\rho+(1-\rho)(h-t)>\rho,\quad \rho>r-h+t>1/16.$$

因为 $p\geqslant 1/a$ 和 $r>\rho>1/16$，我们有

$$\Phi(r)\leqslant(1-r)^{pa-1}\left(\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{a}}\right)^{p}\lesssim\Phi(\rho)\qquad. \tag{5.39}$$

先前的积分可进一步估计为

$$\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}\left(\int_{0}^{1}\Phi(\rho)M_p^q((1-h+t)\rho,Rf)d\rho\right)^{q/p}dt\right)^{1/q}$$

$$=\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}N_{p,q,\varphi}^{q}(1-h+t,\ Rf)dt\right)^{1/q}$$

$$\lesssim\left(\int_{\frac{h}{2}}^{h}(h-t)^{q-1}\ \frac{\Omega^{q}(h-t)}{(h-t)^{q}}dt\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\int_{0}^{h}\frac{\Omega^{q}(t)}{t}dt\right)^{1/q}.$$

也就是，

$$\|\Delta_1\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}\lesssim\left(\int_0^h\frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}\qquad. \tag{5.40}$$

同样过程，我们也可得到

$$\|\Delta_3\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}\lesssim\left(\int_0^h\frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}\qquad. \tag{5.41}$$

最后，我们估计 $\|\Delta_2\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}$. 由引理 5.4.2，有

$$\|\Delta_2\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)}$$

$$=\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}\Phi(r)\left(\int_S|f((r-h)\zeta)-f((r-h)e^{ih}\zeta)|^{q}d\sigma(\zeta)\right)^{p/q}dr\right)^{1/p}$$

$$\lesssim\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}\Phi(r)h^{p}M_q{}^{p}(r-h,Rf)dr\right)^{1/p}.$$

取变量代换 $r-h=(1-h)\rho$，则

$$r>\rho>r-h>1/16, \tag{5.42}$$

故可得 $\Phi(r)\lesssim\Phi(\rho)$. 所以

$$\| \Delta_2 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \leqslant hN_{p,q,\varphi}(1-h,Rf) \leqslant \Omega(h).$$

因为 $\Omega^q(h)$ 为连续模型函数，易知（参见[1,2]）

$$\Omega^q(h) \leqslant (\frac{h}{t}+1)\Omega^q(t),$$

或

$$\frac{\Omega^q(h)}{h} \leqslant \frac{2\Omega^q(t)}{t}, \quad \forall\, 0<t<h \quad . \tag{5.43}$$

这样

$$\| \Delta_2 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \leqslant \Omega(h) \lesssim \left(\int_0^h \frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}.$$

综合上面所有结果，我们证明了：若 $\tau \in [0,1/8]$，(5.36) 成立．

（ⅱ）若 $\tau \in (1/8,1)$，则由连续模的性质和引理 5.2.7 知

$$\begin{aligned}
\omega(\tau, f, H_{p,q,\varphi}) &\lesssim \omega(1, f, H_{p,q,\varphi}) \\
&\leqslant (8+1)^{1/q}\omega(1/8, f, H_{p,q,\varphi}) \\
&\lesssim \left(\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\Omega^q(t)}{t}\right)^{1/q} \\
&\lesssim \left(\int_0^{\tau} \frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

(B) 情况 $p<1/a$

取 $s>0$，$\beta \geqslant \frac{1}{p}-a>0$，$\psi(r)=(1-r)^\beta\varphi(r)$．则可由引理 5.2.8 得

$$\begin{aligned}
N_{p,q,\psi}(\rho,R^{\beta,s}f) &= \left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{p\beta-1}\varphi^p(r)M_q{}^p(\rho r, R^{\beta,s}f)dr\right)^{1/p} \\
&\simeq \left(\int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{-1}\varphi^p(r)M_q{}^p(\rho r, f)dr\right)^{1/p} \\
&= N_{p,q,\varphi}(\rho, f) \\
&= \frac{\Omega(1-\rho)}{1-\rho}.
\end{aligned}$$

因为 $p>1/(\beta+a)$，我们可对正规函数 ψ 应用情况(A)的结果．因此，

$$\omega(\tau,R^{\beta,s}f,H_{p,q,\psi}) \lesssim \left(\int_0^{\tau} \frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}.$$

所以，由引理 5.2.9，

$$\omega(\tau, f, H_{p,q,\varphi}) \lesssim \left(\int_0^\tau \frac{\Omega^q(t)}{t}dt\right)^{1/q}.$$

情况Ⅱ. $0<q<1, \quad p<q$

在这种情况下，$\mu=\min\{1, p, q\}=p$. 我们采用与情况Ⅰ同样的过程. 我们仅证明类似（5.40）的结果，其他同理.

我们同样取 $h_k=(1-(\frac{1}{2})^k)h$，与引理 5.4.1（ⅱ）证明相同. 利用（5.31）和 Minkowski 不等式，我们得到

$$\|\Delta_1\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \lesssim \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r)\left(\sum_{k=0}^\infty (h_{k+1}-h_k)^q M_q{}^q(r-h+h_{k+1}, Rf)\right)^{\frac{p}{q}}dr\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^\infty (h_{k+1}-h_k)^p \int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r)M_q{}^p(r-h+h_{k+1}, Rf)dr\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^\infty \int_{h_{k+1}}^{h_{k+2}} (h-t)^{p-1}\int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r)M_q{}^p(r-h+h_{k+1}, Rf)dr\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\int_{\frac{h}{2}}^h (h-t)^{p-1}\int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r)M_q{}^p(r-h+t, Rf)dr\right)^{1/p}.$$

取变量代换 $r-h+t=(1-h+t)\rho$. 用与情况Ⅰ相同的技巧. 不失一般性，我们假定 $p\geqslant 1/a$，因此（5.39）成立. 所以

$$\|\Delta_1\|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \lesssim \left(\int_{\frac{h}{2}}^h (h-t)^{p-1} N_{p,q,\varphi}^p(1-h+t, Rf)dt\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\int_{\frac{h}{2}}^h (h-t)^{p-1} \frac{\Omega^p(h-t)}{(h-t)^p}dt\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^h \frac{\Omega^p(t)}{t}dt\right)^{1/p}.$$

情况Ⅲ. $0<p<1, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty$

此时，$\mu=\min\{1, p, q\}=p$. 和情况Ⅱ一样我们仅需证明（5.39）类似的结果. 与情况Ⅰ过程相同，在假设（5.37）的情况下证明就足够了. 在这种假设下，我们有 $r-h>1/8$ 和引理 5.4.1(ⅰ)中的不等式可以修改为

$$\left(\int_S |f(r\zeta)-f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q}$$

$$\leqslant \int_0^h \left(\int_S |Rf((r-t)\zeta)|^q d\sigma(\zeta)\right)^{1/q} dt$$

$$= \int_0^h \left(\int_S |Rf((r-h+t)\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{1/q} dt \quad . \qquad (5.44)$$

用（5.44）替代引理 5.4.1(ⅱ)中的不等式，和情况Ⅱ证明一样可得所要结果.

情况Ⅳ.　$1 \leqslant p \leqslant \infty$，　$1 \leqslant q \leqslant \infty$

此时，$\mu = \min\{1, p, q\} = 1$.

同理，我们仅需证明在假设（5.37）下与（5.39）类似结果.

由引理 5.4.1 和 Minkowski 不等式，可得

$$\begin{aligned} & \| \Delta_1 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \\ &= \left\{ \int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r) \left(\int_S |f(r\zeta) - f((r-h)\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right)^{p/q} dr \right\}^{1/p} \\ &\lesssim \left\{ \int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r) \left(\int_0^h \left(\int_S \left(\frac{Rf((r-t)\zeta)}{r-t} \right|^q d\sigma(\zeta) \right)^{1/q} dt \right)^p dr \right\}^{1/p} \\ &\leqslant \int_0^h \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \Phi(r) M_q^p(r-t, Rf) dr \right)^{1/p} dt. \end{aligned}$$

取变量代换 $r - t = (1-t)\rho$，可知（5.42）成立．从而得

$$\| \Delta_1 \|_{H_{p,q,\varphi}[1/4,1)} \lesssim \int_0^h N_{p,q,\varphi}(1-t, Rf) dt \lesssim \int_0^h \frac{\Omega(t)}{t} dt \, .$$

上面证明对情况 $p=\infty$ 或 $q=\infty$ 经适当修改同样适用．定理得证.

§5.5　Hardy—Littlewood **定理**

作为定理 5.3.2 和定理 5.4.4 的直接推论，令 $\Omega(t) = O(t^\alpha)$，我们就可以得到比定理 5.1.2 稍强的结果.

定理 5.5.1　设 $0 < \alpha \leqslant 1$，$0 < p$，$q \leqslant \infty$，和 $f(z) \in H_{p,q,\varphi}$．则存在正的常数 $C = C(p,q,\varphi)$，其与 f 无关且满足：

$$\omega(\rho, f, H_{p,q,\varphi}) \leqslant C\rho^\alpha, \quad \forall \rho \in (0,1),$$

当且仅当

$$\| (Rf)_\rho \|_{H_{p,q,\varphi}} \leqslant C(1-\rho)^{\alpha-1}, \quad \forall \rho \in (0,1).$$

值得一提的是，我们得到定理 5.5.2 在单位球上特殊情况下的结果.

用 $L_a^p(\mathrm{B}, dV_\beta)$ 为加权 Bergman 空间，其包含了 B 上所有这样的全纯函

数 f，满足

$$\| f \|_{L_a^p(B,dV_\beta)} = \left(\int_B |f(z)|^p dV_\beta(z)\right)^{1/p} < +\infty,$$

其中 $0<p\leqslant\infty$，$\beta>-1$，和 $dV_\beta(z)=(1-|z|^2)^\beta dV(z)$，$dV(z)$ 为单位球上规范化的 Lebesgue 测度.

f 的连续模定义为

$$\omega(\delta, f, L_a^p(B, dV_\beta)) := \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\left(\int_B |f(ze^{ih}) - f(z)|^p dV_\beta(z)\right)^{1/p}.$$

令 $0<\alpha\leqslant1$. 一个函数 $f\in L_a^p(B, dV_\beta)$ 被称为属于 α－Hölder 类当且仅当

$$\omega(\rho, f, L_a^p(B, dV_\beta)) \leqslant C\rho^\alpha, \quad \forall \rho\in(0,1),$$

其中 C 仅依赖于 f. 用 $\Lambda^\alpha(L_a^p(B, dV_\beta))$ 表示 Bergman 空间 L_a^p (B, dV_β) 中的 α－Hölder 类.

回忆径向导数的定义

$$Rf(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z).$$

我们记 $(Rf)_\rho(z) = Rf(\rho z)$.

定理 5.5.2 设 $0<\alpha\leqslant1$，$f(z)\in L_a^p(B, dV_\beta)$. 则存在一正常数 $C=C(p,\beta)$，独立于 f 使得

$$\omega(\rho, f, L_a^p(B, dV_\beta)) \leqslant C\rho^\alpha, \quad \forall \rho\in(0,1),$$

当且仅当

$$\| (Rf)_\rho \|_{L_a^p(B,dV_\beta)} \leqslant C(1-\rho)^{\alpha-1}, \quad \forall \rho\in(0,1).$$

特别地，

$$f\in\Lambda^\alpha(L_a^p(B,dV_\beta)) \Longleftrightarrow \| (Rf)_\rho \|_{L_a^p(B,dV_\beta)}$$
$$= O((1-\rho)^{\alpha-1}), \quad \rho\to1^-.$$

众所周知：在某种意义下，Hardy 空间 $H^p(U)$ 可认为是加权 Bergman 空间 $L_a^p(U, dV_\beta)$ 的当 $\beta\to-1^+$ 的极限情形. 这样，定理 5.1.1 的确是定理 5.5.2 的极限情况，即 $\beta\to-1^+$.

第六章　Dirichlet 类的 Fejér 算子逼近

§6.1　背　　景

用 U 表示复平面 C 上的单位圆盘，$H(U)$ 为 U 上所有全纯函数全体．Dirichlet 函数类 $D_p(U)$ 定义为

$$D_p(U) := \left\{ f \in H(U) : \| f \|_{D^p}^p = \int_U | f'(z) |^p dm(z) \leqslant 1 \right\},$$

其中 $dm(z)$ 为 U 上规范化的 Lebesgue 测度，$1 \leqslant p < \infty$.

Hardy 空间 $H^p(U)$ 由 U 上所有满足下列条件的全纯函数 f 构成：

$$\| f \|_{H^p} := \sup_{0<\rho<1} \left(\int_{\mathrm{T}} | f(\rho w) |^p d\sigma(w) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

其中 $d\sigma$ 为单位圆 $\mathrm{T} = \partial U$ 上的规范化的 Lebesgue 测度．熟知（参见 [17,23]）

$$D_p \subset H^p.$$

对任 $f \in H(U)$，其具有 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}, \quad z \in U.$$

Fejér 算子的序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ 为

$$\sigma_0(f)(z) = 0,$$

$$\sigma_k(f)(z) := \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) a_j z^j, \quad k \in \mathrm{N}.$$

假定 U 为 $H^p(U)$ 子集，记

$$F_k(U, H^p) := \sup_{f \in U} \{ \| f - \sigma_k(f) \|_{H^p} \},$$

$$E_k(U, H^p) := \sup_{f \in U} \{ E_k(f)_{H^p} \},$$

其中

$$E_k(f)_{H^p} := \inf\{ \| f - P \|_{H^p} : P \in \mathrm{P}_{k-1} \},$$

P_{k-1} 表示至多 k－1 次代数多项式全体．

周期函数可以通过其 Fourier 级数的 Fejér 算子逼近（例，参见[12]）．关于单位圆盘全纯函数的逼近理论参见[13，14，15，16].

最近，Savchuk 给出了单位圆盘 U 上 Dirichlet 类由 Fejér 算子逼近的精确估计：

定理 6.1.1[17] 设 $1 \leqslant p < \infty$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$．则

（1）对任意 $k \in \mathrm{N}$，

$$\frac{\frac{1}{2}\min(p,q)}{((\frac{q}{2})(k-1)+1)^{\frac{1}{q}}} \leqslant E_k(D_p, H^p) \leqslant F_k(D_p, H^p)$$

$$\leqslant \frac{1}{((\frac{q}{2})(k-1)+1)^{\frac{1}{q}}};$$

（2）对任意 $f \in D_p$，

$$\| f - \sigma_k(f) \|_{H^p} = o(k^{-\frac{1}{q}}), k \to \infty.$$

对于多复变全纯函数，情况则较为复杂．本章目的是将上述结果推广到 C^n 中的单位球 B 上，建立用径向导数定义的 Dirichlet 类 $D_p(\mathrm{B})$ 通过 Fejér 算子逼近的相应结果．

用 $H(\mathrm{B})$ 表示单位球 B 上的全纯函数全体．若 $f \in H(\mathrm{B})$，则 $f(z)$ 具有齐次展开

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z), \tag{6.1}$$

其中 $F_j(z)$ 为 j 次齐次多项式．

回忆 f 的径向导数定义为

$$Rf(z) := \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

也可以写成

$$Rf(z) = \sum_{j=0}^{\infty} jF_j(z) = \sum_{j=1}^{\infty} jF_j(z).$$

对 $s \geqslant 0$，径向导数 $R^s f$ 定义为

$$R^s f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j^s F_j(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j^s F_j(z).$$

Hardy 空间 $H^p := H^p(\mathrm{B})$ 由所有 B 上满足下列条件的全纯函数 f 构成：

$$\| f \|_{H^p}^p := \sup_{0<r<1} \int_S | f(r\zeta) |^p d\sigma(\zeta) < \infty,$$

其中 $d\sigma(\zeta)$ 为 Shilov 边界 $S = \partial\mathrm{B}$ 上的规范化的 Lebesgue 测度，H^∞ 为 B 上的有界全纯函数，范数为

$$\| f \|_{H^\infty} := \sup_{z \in \mathrm{B}} | f(z) |.$$

令 $dv(z)$ 为 B 上的规范化 Lebesgue 测度 . Dirichlet 函数类 $D_p = D_p(\mathrm{B})$ 由径向导数定义为

$$D_p := \{ f \in H(\mathrm{B}) : \| f \|_{D_p}^p := \int_{\mathrm{B}} Rf(z)^p dv(z) \leqslant 1, \quad 1 \leqslant p < \infty \}.$$

我们将在定理 6.2.3 中证明以下事实：

$$D_p(\mathrm{B}) \subset H^p(\mathrm{B}), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

因此，在边界 S 上，Dirichlet 类 D_p 中的每个函数都具有边界值，其 Banach 空间 $L_p(S)$ 中函数且具有范数为

$$\| \cdot \|_{L_p(S)} := \left(\int_S | \cdot |^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

熟知[4,5]：对任 $f \in H^p$，有 $\| f \|_{H^p(\mathrm{B})} = \| f \|_{L_p(S)}$.

类似于 D_p，我们引入一类全纯函数

$$H_p^1 := \{ f : f \in H(\mathrm{B}), \| Rf \|_{H^p} \leqslant 1 \}, 1 \leqslant p < \infty,$$

显然，其为 D_p 的子类 .

利用函数 $f(z) \in H(\mathrm{B})$ 的齐次展开引入 Fejér 算子序列 $\{\sigma_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$：

$$\sigma_0(f)(z) = 0,$$

$$\sigma_k(f)(z) := \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \frac{j}{k}) F_j(z), \quad k \in \mathrm{N}.$$

我们引入逼近误差：

$$F_k(D_p, H^p) := \sup_{f \in D_p} \{ \| f - \sigma_k(f) \|_{H^p} \},$$

$$E_k(D_p, H^p) := \sup_{f \in D_p} \{ E_k(f)_{H^p} \},$$

其中

$$E_k(f)_{H^p} := \inf\{ \| f - P \|_{H^p} : P \in \mathrm{P}_{k-1} \},$$

和 P_{k-1} 为至多 $k-1$ 次代数多项式全体.

我们的主要目的是获得 Dirichlet 函数类利用 Fejér 算子在 Hardy 空间范数下的精确逼近阶和上界估计.

§6.2 包含关系

为证明包含关系 $D_p \subset H^p$，我们需要引入广义混合模空间.

一个定义在 $[0, 1)$ 上的正连续函数 $\Phi(r)$ 被称为广义正规函数，如果存在 $s \geqslant 0$ 满足 $(1 - r^2)^s \Phi(r)$ 为一正规函数.

定义 6.2.1 （参见[58]）广义混合模空间 $H_{p,q}(\Phi)(0 < p, q \leqslant \infty)$ 定义为：

$$H_{p,q}(\Phi) := \{ f \in H(\mathrm{B}) : \| f \|_{H_{p,q}(\Phi)}^p = \int_0^1 (1 - r)^{ps-1} \Phi^p(r) M_q^p(r, R^s f) dr < \infty \},$$

其中 $s \geqslant 0$ 和 $(1 - r)^s \Phi(r)$ 为正规的.

引理 6.2.2[58] 设 $0 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$. 则

(i) $H_{p,p}(1) \subset H^p(\mathrm{B}) \subset H_{2,p}(1)$.

(ii) $H_{2,q}(1) \subset H^q(\mathrm{B}) \subset H_{q,q}(1)$.

定理 6.2.3 设 $1 \leqslant p < \infty$. 则

$$D_p(\mathrm{B}) \subset H^p(\mathrm{B}). \tag{6.2}$$

证明：由广义混合模空间 $\mathrm{H}_{p,q}(\Phi)$ 性质（参见[59]），直接易得

$$H_{p,q}((1 - r)^a) \subset H_{p,q}((1 - r)^b), a \leqslant b, \tag{6.3}$$

和若 $p \geqslant 2$ 及任 $\epsilon > 0$，

$$H_{p,q}((1 - r)^a) \subset H_{2,q}((1 - r)^{a+\epsilon}), a \in \mathrm{R}, \tag{6.4}$$

其可由 Hölder 不等式得到．

所以由（6.3），（6.4）和引理 6.2.2，得到

（ⅰ）当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，

$$D_p(\mathrm{B})\subset H_{p,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1})\subset H_{p,p}(1)\subset H^p(\mathrm{B}).$$

（ⅱ）当 $2<p<\infty$ 时，对任 ϵ 满足 $0<\epsilon<\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} D_p(\mathrm{B}) &\subset H_{p,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1}) \\ &\subset H_{2,p}((1-r)^{\frac{1}{p}-1+\epsilon}) \\ &\subset H_{2,p}(1) \\ &\subset H^p(\mathrm{B}). \end{aligned}$$

§6.3　一些引理

我们记

$$Q_{k,\rho}(f)(z):=\sum_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)})F_j(z),\quad z\in\mathrm{B},\tag{6.5}$$

记 Poisson 核

$$P(re^{it},e^{i\theta})=\frac{1-r^2}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}.$$

令 $f_\zeta(\lambda)=f(\lambda\zeta)$，其中 $z=\lambda\zeta$，$\lambda\in U$ 和 $\zeta\in S$．若 $f(z)\in H(\mathrm{B})$，则 $f_\zeta(\lambda)\in H(U)$．所以由（6.5）知

$$Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\lambda):=Q_{k,\rho}(f)(\lambda\zeta)=\sum_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)})F_j(\zeta)\lambda^j\quad .\tag{6.6}$$

引理 6.3.1　设 $f_\zeta\in H(U)$．则对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，$\rho\in[0,1)$，$k\in\mathrm{N}$，

$$f_\zeta(\rho^2e^{i\theta})-f(0)=\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{f'_\zeta(re^{it})}{1-re^{i(\theta-t)}}dtrdr,\tag{6.7}$$

$$Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta})-f(0)=\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^je^{ij(\theta-t)}dtrdr.\tag{6.8}$$

证明：我们仅需证明（6.8），类似可得（6.7）．

由（6.1），得

$$f_\zeta(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\zeta)\lambda^j.$$

所以有

$$F'_\zeta(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} jF_j(\zeta)\lambda^{j-1},$$

从而

$$F'_\zeta(re^{it}) = \sum_{j=1}^{\infty} jF_j(\zeta)r^{j-1}e^{it(j-1)}.$$

由三角函数积分的正交性质，我们可得

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi} f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^j e^{ij(\theta-t)}dtrdr \\
&= \frac{e^{i\theta}}{\pi}\int_0^\rho\int_0^{2\pi} f'_\zeta(re^{it})\sum_{j=1}^{k-1}(1-r^{2(k-j)})r^{j-1}e^{-i(j-1)t}e^{i(j-1)\theta}dtrdr \\
&= \sum_{j=1}^{k-1}\int_0^\rho 2jF_j(\zeta)r^{2j-1}(1-r^{2(k-j)})e^{ij\theta}dr \\
&= \sum_{J=1}^{k-1}(1-\frac{j}{k}\rho^{2(k-j)})F_j(\zeta)\rho^{2j}e^{ij\theta} \\
&= Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta}) - f(0).
\end{aligned}$$

引理 6.3.2 设 $f_\zeta \in H(U)$. 则对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, 1)$, $k \in \mathrm{N}$, 有

$$f_\zeta(\rho^2e^{i\theta}) - Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2e^{i\theta}) = \frac{e^{ik\theta}}{\pi}\int_0^\rho r^k\int_0^{2\pi} f'_\zeta(re^{it})e^{-i(k-1)t}P(re^{it}, e^{i\theta})dtdr. \tag{6.9}$$

证明：我们首先将引理 6.3.1 中 (6.8) 的核函数改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-2}(1-r^{2(k-j-1)})r^j e^{ij(\theta-t)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} r^j e^{ij(\theta-t)} - r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}\sum_{j=0}^{k-2} r^j e^{-ij(\theta-t)} \\
&= \frac{1-r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} - r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}\frac{1-r^{k-1}e^{-i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}} \\
&= \frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}}{1-re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^k e^{i(k-2)(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}} + \frac{r^{2k-1}e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}} - r^{k-1}e^{i(k-1)(\theta-t)}P(re^{it},e^{i\theta}) + \frac{r^{2k-1}e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}.$$

将其代入（6.8）式并利用（6.7）和关系式

$$\int_0^{2\pi} f'_\zeta(re^{it})\frac{e^{-i(\theta-t)}}{1-re^{-i(\theta-t)}}dt = 0.$$

我们可以得到公式（6.9）.

引理 6.3.3[4,5]　设 f 为 S 上的函数，且仅依赖 z_1，…，z_k，其中 $1\leqslant k<n$. 则 f 可认为定义在 B_k 上而且

$$\int_S f d\sigma = \binom{n-1}{k}\int_{B_k}(1-|w|^2)^{n-k-1}f(w)dv_k(w),$$

其中 B_k 为 C_k 中的开单位球，dv_k 为 B_k 上的规范化的体积测度.

我们需要逼近论中的对偶关系.

引理 6.3.4[1]　设 X 表示赋范线性空间，模为 $\|\cdot\|_X$，Y 为 X 中闭子空间，$f\in X\setminus Y$. 则

$$E(f,Y) = \inf_{g\in Y}\|f-g\|_X = \sup_{\substack{\lambda\in Y^\perp\\ \|\lambda\|=1}}\lambda(f),$$

其中 $Y^\perp := \{\lambda\in X^*:\lambda(g)=0,\forall g\in Y\}$.

§6.4　Fejér 算子逼近

取

$$h(z) = \frac{z_1^k}{k}\left(\frac{\Gamma(\frac{kp}{2}+n+1)}{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)\Gamma(n+1)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

利用引理 6.3.3，可得

$$\|z_1^k\|_{D_p} = k\left(2n\int_0^1 r^{2n-1+kp}dr\int_S|\zeta_1|^{kp}d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= k\left(\frac{2n}{2n+kp}\int_S|\zeta_1|^{kp}d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= k\left(\frac{2n}{2n+kp}(n-1)\int_U|w|^{kp}(1-|w|^2)^{n-2}dv(w)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= k\left(\frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+n+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由于 $\| h(z) \|_{D_p} = 1$，故 $h(z) \in D_p(\mathrm{B})$．我们将利用 $h(z)$ 给出 $E_k(D_p, H^p)$ 的一个下界.

定理 6.4.1 设 $1 \leqslant p < \infty$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

(1) 对任意 $k \in \mathrm{N}$ 且满足 $k > \frac{2n}{p}$,

$$k^{-\frac{1}{q}} \lesssim E_k(D_p, H^p) \leqslant F_k(D_p, H^p) \lesssim k^{-\frac{1}{q}}.$$

(2) 对任意 $f \in D_p$,

$$\| f - \sigma_k(f) \|_{H^p} = o(k^{-\frac{1}{q}}), k \to \infty.$$

证明：我们首先证明（1）.

由对偶关系（见引理 6.3.3)，知

$$E_k(h, H^p) = \sup\{ |< h, g >| : g \in L_{q,k}(\mathrm{S}), \| g \|_{L_q(\mathrm{S})} = 1\},$$

其中

$$< h, g > := \int_S h\bar{g}\, d\sigma,$$

$$L_{q,k}(\mathrm{S}) := \{g \in L_q(\mathrm{S}) : < g, \zeta^m > = 0, |m| = 0, 1, \cdots, k-1\}.$$

我们取

$$g(\zeta) = \zeta_1^k \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+1\right)\Gamma n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

易知等式（参见[4]）

$$\int_S \zeta^m \bar{\zeta}^l d\sigma(\zeta) = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq l, \\ \frac{(n-1)!m!}{(n-1+|m|)!} & if \quad m = l, \end{cases}$$

其中 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$，$l = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 为多重指标，

$|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$．易知 $g \in L_{q,k}(\mathrm{S})$ 且 $\| g \| L_q = 1$．

所以，

$$
\begin{aligned}
E_k(D_p, H^p) &\geqslant E_k(h, H^p) \\
&\geqslant |<h, g>| \\
&= \frac{\Gamma(k)}{n^{\frac{1}{p}}\Gamma(k+n)} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+1\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\simeq k^{-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

在上面最后一步，我们使用了如下事实：

$$
\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \simeq k^{a-b},
$$

其中 a，$b \in \mathrm{R}$.

现在我们给出 $F_k(D_p, H^p)$ 的一个上界.

对任意 $f \in D_p$，由引理 6.3.2 和 Hölder 不等式，得

$$
\begin{aligned}
& |f_\zeta(\rho^2 e^{i\theta}) - Q_{k,p}(f_\zeta)(\rho^2 e^{i\theta})|^p \\
\leqslant & \left((\frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} |f_\zeta'(re^{it})| r^k P(re^{it}, e^{i\theta}) dt dr\right)^p \\
\leqslant & \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} |f_\zeta'(re^{it})|^p P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r^{2n-1+p} dr\right) \\
& \times \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} r^{(k-2n+1-p)q} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r^{2n-1+p} dr\right)^{\frac{p}{q}} \\
\leqslant & \frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} |f_\zeta'(re^{it})|^p P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r^{2n-1+p} dr \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}}
\end{aligned}
$$

最后一步利用了假设 $k > \frac{2n}{p}$，这意味着 $kq - 2nq + 2n > 0$.

所以在 $[0, 2\pi]$ 上对 θ 积分并使用 Fubini 定理，我们可得估计式

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\zeta(\rho^2 e^{i\theta}) - Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2 e^{i\theta})|^p d\theta \\
\leqslant & \frac{1}{\pi}\int_0^\rho \int_0^{2\pi} |f_\zeta'(re^{it})|^p dt r^{2n-1+p} dr \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}}
\end{aligned}
$$

在 S 上积分并再次使用 Fubini 定理，得到

$$
\begin{aligned}
& \int_S |f(\rho^2 \zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2 \zeta)|^p d\sigma(\zeta) \\
= & \int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\zeta'(\rho^2 e^{i\theta}) - Q_{k,\rho}(f_\zeta)(\rho^2 e^{i\theta})|^p d\theta d\sigma(\zeta)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} |f'_\zeta(re^{it})|^p dt r^{2n-1+p} dr \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}} d\sigma(\zeta)$$

$$= \int_S \frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} |Rf(re^{it}\zeta)|^p dt r^{2n-1} dr d\sigma(\zeta) \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}}$$

$$= 2\int_0^1 \int_S |Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) r^{2n-1} dr \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1}{n} \| f \|_{D_p}^p \cdot \left(\frac{q}{2}(k-2n)+n\right)^{-\frac{p}{q}}.$$

所以对 $f \in D_p$，

$$\| f(\rho\cdot) - Q_{k,\rho}(f)(\rho\cdot) \|_{L_p(S)} \leqslant \frac{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-2n)+n\right)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}}, \forall \rho \in [0,1).$$

对上面不等式取极限 $\rho \to 1^-$，考虑到极限关系

$$Q_{k,\rho}(f)(\rho\cdot) \to \sigma_k(f)(\cdot)$$

并利用 Riesz 定理（参见[5]）

$$\| f(\cdot) - f(\rho\cdot) \|_{L_p(S)} \to 0, \quad \rho \to 1^-,$$

我们可得

$$\| f - \sigma_k(f) \|_{H^p} \leqslant \frac{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-2n)+n\right)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}}.$$

因为 f 为 D_p 中任意函数，故

$$\| F_k(D_p, H^p) \| \leqslant \frac{\left(\left(\frac{q}{2}\right)(k-2n)+n\right)^{-\frac{1}{q}}}{n^{\frac{1}{p}}} \simeq k^{-\frac{1}{q}}.$$

（2）同上，假设 f 为 D_p 中任一函数．由引理 6.3.2，利用上面同样方法，可得

$$\int_S |f(\rho^2\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

$$= \int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{i\theta}\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2 e^{i\theta}\zeta)|^p d\theta d\sigma(\zeta)$$

$$\leqslant \int_S \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi} |Rf(re^{it}\zeta)| r^{k-1} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt dr \right|^p d\theta d\sigma(\zeta)$$

$$\leqslant 2\int_0^1 r^{k-1} \int_S |Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) dr \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{p}{q}}, \tag{6.10}$$

上式最后不等式由 Hölder 不等式得到.

因此，采用与(1)同样讨论，我们得到估计式

$$k^{\frac{1}{q}}\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}\leqslant 2\left\{\int_0^1 r^{k-1}\int_S|Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)dr\right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (6.11)$$

由于 $f\in D_p$，对任意固定 $\epsilon>0$ 和任意 $k\geqslant 2n$，存在一个常数 R，$0<R<1$，满足

$$\int_R^1 r^{k-1}\int_S|Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)dr\leqslant\epsilon. \quad (6.12)$$

注意到

$$\int_0^R r^{k-1}\int_S|Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)dr\leqslant R^{k-2n}\|f\|_{D_p}\leqslant R^{k-2n}. \quad (6.13)$$

所以由(6.11)-(6.13)，可得

$$n^{\frac{1}{q}}\|f-\sigma_k(f)\|_{H^p}\leqslant 2(\epsilon+R^{k-2n})^{\frac{1}{p}}\to 2\epsilon^{\frac{1}{p}},\quad k\to\infty.$$

定理得证.

定理 6.4.2　设 $1\leqslant p<\infty$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则对任意 $k\in\mathrm{N}$，

$$k^{-1}\lesssim E_k(H_p^1,H^p)\leqslant F_k(H_p^1,H^p)\leqslant\frac{2}{k}.$$

证明：取

$$h(z)=\frac{z_1^k}{k}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+1\right)\Gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

和

$$g(\zeta)=\zeta_1^k\cdot\left(\frac{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{kq}{2}+1\right)\Gamma(n)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

通过计算容易得到 $\|h(z)\|_{H_p^1}=1$，故

$$h(z)\in H_p^1.$$

与定理 6.4.1(1)证明相同，我们可得

$$\begin{aligned}E_k(D_p,H^p)&\geqslant E_k(h,H^p)\\&\geqslant|<h,g>|\end{aligned}$$

$$= \frac{(\Gamma k)}{\Gamma(k+n)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{kq}{2}+n)}{\Gamma(\frac{kq}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\simeq k^{-1}.$$

设 $f \in H_p^1$. 由于

$$\sup_{0<r<1}\int_S |Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \leqslant 1,$$

由不等式（6.10）可得：$\forall \rho \in [0,1)$,

$$\int_S |f(\rho^2\zeta) - Q_{k,\rho}(f)(\rho^2\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

$$\leqslant 2\int_0^1 r^{k-1}\int_S |Rf(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)dr \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leqslant \frac{2}{k} \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{2}{k}\right)^p. \tag{6.14}$$

由（6.14），与定理 6.4.1（1）证明一样，取极限 $\rho \to 1^-$，得到所需结果.

注：由定理 6.4.2 的证明过程，我们可以看到：当 $n=1$ 时，有

$$\frac{1}{k} \leqslant E_k(H_p^1, H^p) = F_k(H_p^1, H^p) \leqslant \frac{2}{k}.$$

这就和 Savchuk 在[17]中所得的结果保持一致.

参考文献

[1] Devore R A，Lorentz G G. Constructive Approximation [M]. Berlin：Springer-Verlag，1993.

[2] Lorentz G G. Approximation of Function [M]. New York：Holt. Rinehart and Winston，1966.

[3] 沈燮昌 . 复变函数逼近论 [M]. 北京：科学出版社，1992.

[4] Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of C^n [M]. New York：Springer-Verlag，1980.

[5] Zhu K H. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball [M]. Berlin：Springer-Verlag，2004.

[6] 史济怀. 多复变函数论基础 [M]. 北京：高等教育出版社，1996.

[7] 徐利治，王仁宏，周蕴时 . 函数逼近的理论与方法 [M]. 上海：上海科学技术出版社，1983.

[8] Peetre J. On the connection between the theory of interpolation spaces and approxi-mation theory [J] //Alexits G，Stechkin S B.（eds）：Proc. Conf. Construction of Func-tion. Budapest，1969，351－363.

[9] Hardy G H，Littlewood J E. Some properties of fractional integrals，II [J]. Math. Z.，1932，34：403－439.

[10] Kryakin Y，Trebels W. q-moduli of continuity in H^p (U)，$p>0$，and an inequality of Hardy and Littlewood [J]. J. Approx. Theory，2002，115：238－259.

[11] Zygmund A. Smooth function [J]. Duke Math. J.，1945，12：47－76.

[12] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory [M] // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[13] Stechkin S B. An estimate of the remainder of the Taylor series for some classes of analytic functions [J]. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1953, 17: 461—472.

[14] Storozhenko E A. Approximation of functions of class H_p, $0 < p \leqslant 1$ [J]. Mat. Sb., 1978, 105: 601—621.

[15] Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejér means [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51: 274—278.

[16] Savchuk V V. Approximation of functions of Dirichlet class by Fejér means [J]. Math. Notes, 2007, 81: 665—670.

[17] Aulaskari R, Xiao J, Zhao R H. On subspaces and subsets of BMOA and UBC [J]. Analysis, 1995, 15: 101—121.

[18] Dai F, Xu Y. Approximation Theory and Harmonic Analysis on Spheres and Ball [M]. New York: Springer-Verlag, 2013.

[19] Xiao J. Holomorphic Q Classes [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[20] Xiao J. Geometric Q_p Functions [M]. Frontiers in Mathematics, Birkhauser-Verlag, 2006.

[21] Stolorenko I A. On Jackson type theorems in H^p ($0 < p < 1$) [J]. Isvestia USSR., 1980, 44: 946—962.

[22] Anderson J M, Hinkkanen A, Lesley F D. On theorems of Jackson and Bernstein type in the complex plane [J]. Constr. Approx., 1988, 4: 307—319.

[23] Garnett J B. Bounded Analytic Functions [M]. New York: Academic Press, 1981.

[24] Hahn K T, Mitchell J. H^p spaces on bounded symmetric domains [J]. Ann. Polon. Math., 1973, 28: 89—95.

[25] Aulaskari R, Stegenga D A, Xiao J. Some subspaces of BMOA and their characteri— zations in terms of Carleson measure [J]. Rocky

Montain J. Math., 1996, 26: 485—506.

[26] Li B, Ouyang C H. Higher radial derivative of functions of Qp spaces and its applications [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 327: 1257—1272.

[27] Ren G B, Kähler U. Radial derivative on bounded symmetric domains [J]. Studia Math., 2003, 157: 57—70.

[28] Li B, Ouyang C H. Higher radial derivative of Bloch type functions [J]. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed., 2002, 22: 433—445.

[29] John F, Nirenberg L. On function of bouned mean oscillation [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1961, 14: 415—426.

[30] Zhu K H. Operator Theorey in Function Spaces [M]. New York: Marcel Dekker, 1990.

[31] Choa J S, Choa B R. A Littlewood-Paley type identity and a characterization of *BMOA* [J]. Complex Variables Theory Appl., 1991, 17: 15—23.

[32] Ouyang C H, Yang W S, Zhao R H. M·obius invariant Q_p spaces associated with the Green' s function on the unit ball of C^n [J]. Pacific J. Math., 1998, 182: 69—99.

[33] Essen M, Wulan H. On analytic and meromorphic function and spaces of Q_K type [J]. Illinois J. Math., 2002, 46: 1233—1258.

[34] Wu P C, Wulan H. Characterization of Q_T spaces [J]. J. Math. Anal Appl., 2001, 254: 484—497.

[35] Zhao R. On a general family of function spaces [J]. Ann. Acad. Sci Fenn. Math. Diss., 1996, 105: 1—56.

[36] Hu Z. J. Q_p spaces in the unit ball of C^n with $\frac{n-1}{n}<p\leqslant 1$ [J]. J. Baoji Univ. Arts Sci. Math. Colloq. Chin. Univ., 2004, 1: 19—27. (Chinese)

[37] Timoney R M. Bloch functions in several complex variables II [J]. J.

Reine Angew. Math. , 1980, 319: 1—32.

[38] Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform [J]. Comm. Pure. Appl. Math. , 1961, 14: 187—214.

[39] Hardy G H, Littlewood J E. Some properties of fractional integrals, I [J]. Math. Z. , 1928, 27: 565—606.

[40] Berger C, CoburnL. Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space [J]. Trans. Amer. Math. Soc. , 1987, 301: 813—829.

[41] Janson S, Peetre J, Rochberg R. Hankel forms and the Fock space [J]. Revista Mat. Ibero-Amer. , 1987, 3: 61—138.

[42] Tung Y C. Fock spaces [D]. Ph. D. dissertation at the University of Michigan, 2005.

[43] Wang M Z, Ren G B. Jackson' s theorem on bounded symmetric domains [J]. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2007, 23: 1391—1404.

[44] Chen Y W, Wang Z J, Dong W L. Jackson's theorem in Hardy-Sobolev type space in the unit polydiscs [C]. ICICA2012, Part I, CCIS 307, 2012: 360—367.

[45] Baernstein II A. Analytic Functions and Bounded Mean Oscillation [M] // Brannan D A, Clunie J G. Aspects of Contemporary Complex Analysis. London: Academic Press, 1980: 3—36.

[46] Ren G B, Wang M Z. Holomorphic Jackson' s theorems in polydiscs [J]. J. Approx. Theory, 2005, 134: 175—198.

[47] Balázs K, Kilgore T. On some constant in simultaneous approximation [J]. Internat. J. Math. Math. Sci. , 1995, 18: 279—286.

[48] Riesz M. Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome [J]. Jahresbericht d. Deutschen Math. , 1914, 23: 354—368.

[49] Arrestov V V. On integral inequalities for trigometric polynomials and their derivatives [J]. Math. USSR—Izv, 1982, 18: 1—17.

[50] Shi J H. Duality and multipliers of mixed norm spaces in the ball (I) [J]. Complex Variables，1994，25：119－130.

[51] Ditzian Z. A K-functional and the rate of converagence of some linear polynomials operators [J]. Proceedings of A. M. S.，1996，124：1773－1781.

[52] Ditzian Z，Hristov V H，Ivanov K G. Moduli of smoothness and K-functional in L_p，$0<p<1$ [J]. Const. Approx.，1995，11：67－83.

[53] Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces [M]. Rio de Janerio：Instituto de Matema tica Pura e Aplicada，1968.

[54] Belkina E S，Platonov S S. Equivalence of K-Functionals and modulus of smoothness constructed by generalized Dunkl translations [J]. Russian Mathematics，2008，52 (8)：1－11.

[55] Rustamov Kh P. Equivalence of K-functional and moduli of smoothness of functions of on the sphere [J]. Mathematical Notes，1992，52 (3)：965－970.

[56] 陈英伟，王志军，刘玉军. Hardy 型空间 A_μ 中的 Jackson 定理 [J]. 河北师范大学学报（自然科学版），2013，37 (2)：113－118.

[57] Hua L K. Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains [M]. Transl. Math. Monogr. 6，Amer. Math. Soc.，1963.

[58] Duren P L. Theory of H^p Spaces [M]. New York：Academic Press，1970.

[59] Ren G B. Mixed norm spaces，their Bergman type operators and coeff cient multipliers [D]. Ph. D. dissertation at USTC，1997.

[60] Shi J H，Ren G B. Coefficient multipliers of mixed norm spaces in the ball [J]. Science in China，Ser. A，2006，49：1491－1503.

[61] Andrievskii V. Harmonic version of Jackson' s theorem in the complex plane [J]. J. Approx. Theory，1997，90：224－234.

[62] Chen Y W，Ren G B. Jackson' s theorem in Qp spaces [J]. Science in

China Series A：Mathematics，2010，53 (2)：367—372.

[63] Chen Y W，Ren G B. Hölder functions in Bergman type spaces [J]. Studia. Math. 2012，212 (3)：237—258.

[64] Chen Y W，Zhao X H. Jackson' s theorem in Qp spaces in polydiscs [C]. CMTEE2014，AMR，2014：1030—1032：1909—1912.

[65] Cohn W S. Non-isotropic Hausdorff measure and exceptional sets for holomorphic Sobolev functions [J]. Illinois J. Math.，1989，33：673—690.

[66] Colzani L. Interpolation and Approximation by Rational Function in the Complex Domain [M]. Providence R. I.：American Mathematical Society，1965.

[67] Colzani L. Jackson theorems in Hardy spaces and approximation by Riesz means [J]. J. Approx. Theory，1987，49：240—251.

[68] Ditzian Z. Fraction derivatives and best approximation [J]. Acta Math. Hungar.，1998，81：323—348.

[69] Ditzian Z，Ivanov K G. Strong converse inequalities [J]. J. d' Analyse Math.，1993，61：61—111.

[70] Farkov Y A. The n-widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables [J]. J. Approx. Theory，1993，75：183—197.

[71] Hardy G H，Littlewood J E. Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions [J]. J. Math. Oxford Ser.，1941，12：221—256.

[72] Jackson D. On approximation by trigonometrical sums and polynomials [J]. Trans. Amer. Math. Soc.，1912，13：491—515.

[73] Jevtic M. Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions [J]. Complex Variables，1987，8：293—301.

[74] Korneichuk N P. Extremal Problems of Approximation Theory [M]. Moscow：Nauka，1976. (in Russian).

[75] Kryakin Y. On a theorem of Hardy and Littlewood [J]. Math. Notes，1993，53：167—171.

[76] Li L Q. The Peetre K-functional and the Riesz summabilty operator for the Fourier-Legendre expansions [J]. J. Approx. Theory, 1999, 99: 112—121.

[77] Litlewood J E, Paley R E A C. Theorems on Fourier series and power series [J]. Quart J. London Math. Soc., 1931, 42: 52—89.

[78] Mateljevic M, Pavlović M. Multipliers of H^p and BM OA [J]. Pacific J. of Math., 1990, 146: 71—84.

[79] Nikol' skii S M. Approximation of Function of Several Variabls and Imbedding Theorems [M]. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1975.

[80] Ren G B, Chen Y W. Gradient estimates and Jackson' s theorem in Q_μ spaces related to measures [J]. J. Approx. Theory, 2008, 155 (2): 97—110.

[81] Sewell W E. Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain [M]. Princeton: Prinston Univ. Press, 1942.

[82] Shi J H. On the rate of growth of the means M_p of holomorphic and pluriharmornic functions on bounded symmetric domains of C^n [J]. J. Math. Anal. Appl., 1987, 126: 161—175.

[83] Vakarchuk S B. On the best polynomial approximation in some Banach spaces of functions that are analytic in the unit disc [J]. Math. Notes, 1994, 55: 338—343.

[84] Walsh J L, Saff E B. Extensions of D. Jackson' s theorem on best complex polynomial mean approximations [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 138: 61—69.

[85] Wang K Y, Li L Q. Harmonic Analysis and Approximation on the Unit Sphere [M]. Beijing: Science Press, 2000.

[86] Xu Y. Approximation by means of h-harmonics polynomials on the unit sphere [J]. Adv. in Comp. Math., 2004, 20: 247—260.

[87] Xu Y. Weighted approximation of functions on the unit sphere [J].

Const. Approx.，2005，21：1—28.

[88] Zygmund A. Trigonometric Series [M]. Cambridge，UK：Cambridge Univ. Press，1959.

[89] 陈英伟，刘玉军. Hardy 型空间 A_μ 中的强逆不等式 [J]. 河北师范大学学报（自然科学版），2011，35(4)：336—342.

[90] 陈英伟，任广斌. Q_p 空间中的 Jackson 定理 [J]. 中国科学 A 辑，2009，39(5)：567—573.

[91] 陈英伟，任广斌. Q_p 空间中的 Bernstein 定理 [J]. 数学学报，2015.

[92] 陈英伟，王占京，王志军. 全纯 A_μ 空间中 K-泛函和光滑模的等价性 [J]. 数学杂志，2015.

[93] 陈英伟，王志军，王占京. Dirichlet 函数类的 Fejèr 算子逼近 [J]. 应用数学学报，2013，36(2)：269—279.

[94] 王志军，陈英伟，李子芳. Hardy 型空间 A_μ 中的 Bernstein 定理 [J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2013，37(4)：325—329.

[95] 王志军，陈英伟. 有界对称域上 Ω 代数中的 Jackson 定理 [J]. 河北大学学报(自然科学版)，2014，34(4)：342—346.

[96] 陈英伟，赵秀恒，李子芳. Q_p 空间中 K—泛涵与光滑模等价性 [J]. 高等学校计算机数学学报，2015.

后　记

著者自2007年开始中国科学技术大学博士研究生阶段学习以来，在导师任广斌教授的精心指导下，开展多复变函数论逼近方面的研究。在平时的学习和讨论中他不仅传授给我大量最新的专业知识，也教我进行学术研究的方法。本书大部分内容正是在任老师悉心指导下完成的。任老师严谨踏实的治学态度，精益求精的科研精神，孜孜不倦的工作热情，诚挚宽厚的人格魅力是我终生学习的楷模！谨此向任老师致以崇高的敬意和衷心的感谢！同时也感谢2012年至2014年任老师为著者提供三次暑期学术访问机会和热忱帮助！

感谢河北经贸大学数统学院提供优良的工作环境和浓厚的学术氛围及学院领导的关怀和大力支持！

最后感谢国家自然科学基金(11126246)，河北省自然科学基金(A2015207007)，河北省教育厅科研基金（QN20131027）和河北经贸大学校内科研基金(2013KYQ07）等项目支持，感谢河北经贸大学校内出版基金和数统学院应用统计学省重点学科的特别资助。

陈英伟

2015年6月